UNIVERSITÉ de Liège

Analyse II (2^{e} partie)

Notes du cours de la deuxième année de bachelier en sciences mathématiques

Jean-Pierre Schneiders

Année 2010-2011

1 Fonctions Complexes d'une Variable Complexe

1.1 Rappel sur les nombres complexes

Le champ $\mathbb{C}$ des nombres complexes n'est autre que le plan numérique $\mathbb{R}^2$ muni des opérations d'addition et de multiplication définies par

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Le neutre pour l'addition (resp. la multiplication) est le nombre complexe $(0, 0)$ (resp. $(1, 0)$).

Le corps $\mathbb{R}$ des réels se plonge canoniquement dans $\mathbb{C}$ par l'application

$$x \mapsto (x, 0)$$

que nous utiliserons implicitement pour identifier $\mathbb{R}$ à une partie de $\mathbb{C}$. En d'autres termes, si $x \in \mathbb{R}$, nous conviendrons également de noter x le nombre complexe $(x, 0)$.

L'unité imaginaire $i = (0, 1)$ joue un rôle très important dans $\mathbb{C}$. On a bien sûr $i^2 = -1$ et ce fait combiné au fait que tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ suffit à déterminer complètement la structure de champ de $\mathbb{C}$.

L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est appelée *représentation cartésienne* de z. On définit la *partie réelle* $\Re z$ (resp. *imaginaire* $\Im z$) de z comme étant le réel x (resp. y).

Le *conjugué* d'un nombre complexe $z = (x, y)$ est par définition le complexe $\overline{z} = (x, -y)$. La conjugaison est compatible avec la structure de champ de $\mathbb{C}$ (i. e. on a

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \qquad \text{et} \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}).$$

De plus, on vérifie aisément que

$$\Re z = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \Im z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Le *module* d'un nombre complexe $z = (x, y)$ est par définition la distance euclidienne de z à 0 dans $\mathbb{C}$; on le note $|z|$. On a bien sûr

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

De plus, comme

$$z\overline{z} = |z|^2$$

on a aussi

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

si $z \neq 0$.

Un nombre complexe $z = (x, y)$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$z = (r\cos\theta, r\sin\theta) \tag{*}$$

avec $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Une telle écriture est appelée une *représentation polaire* de z. Dans ce cas,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

est bien sûr le module de z. Si ce module est nul, tout $\theta \in \mathbb{R}$ vérifie l'équation (*). Par contre, si $r \neq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ est solution de (*) si et seulement si

$$\begin{cases} \cos\theta &= x/\sqrt{x^2+y^2} \\ \sin\theta &= y/\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} .$$

Ce système possède une et une seule solution $\theta \in \,]-\pi, \pi]$. Cette solution est appelée l'*argument principal* de z et notée $\arg(z)$. Les autres solutions du système ci-dessus fournissent les autres *arguments* de z ; elles sont données par les réels de la forme $\arg(z) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Rappelons que l'on peut exprimer $\arg(z)$ au moyen de la fonction arccos, de la fonction arcsin ou de la fonction arctg. Par exemple :

(a) Si $x > 0$, on a $\arg(z) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et comme

$$\operatorname{tg}(\arg(z)) = \frac{y}{x}$$

on voit que

$$\arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

(b) Si $y > 0$, on a $\arg(z) \in \,]0, \pi[$ et comme

$$\operatorname{tg}\left(\arg(z) - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{x}{y}.$$

On voit que

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

(c) Si $y < 0$, on a $\arg(z) \in \,]-\pi, 0[$ et comme

$$\operatorname{tg}\left(\arg(z) + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{x}{y}$$

on voit que

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

(d) Enfin, si $x < 0$ et $y = 0$, on a

$$\arg(z) = \pi.$$

1.2 Notion de fonction complexe d'une variable complexe

Une fonction complexe d'une variable complexe est simplement une fonction à valeurs complexes définie sur une partie du plan complexe.

Exemples 1.2.1. (a) Puisque $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$, les fonctions $\Re z$, $\Im z$, $|z|$, $\arg(z)$ considérées plus haut sont des exemples élémentaires de fonctions complexes d'une variable complexe.

(b) Il en est de même des fonctions z et $\overline{z}$, de leurs puissances naturelles et plus généralement de toute fonction polynomiale de la forme

$$\sum_{m+n\leq p} a_{mn} z^m \overline{z}^n$$

où $a_{mn} \in \mathbb{C}$. On remarquera d'ailleurs que les fonctions polynomiales du type précédent coïncident avec les fonction polynomiales à coefficients complexes en les parties réelles et imaginaires x et y de z.

(c) Un exemple plus intéressant est fourni par l'extension au plan complexe de l'exponentielle naturelle. Rappelons que cette extension est définie par la formule

$$e^z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}.$$

De cette formule, on tire que $e^0 = 1$ et que

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

si z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Il s'ensuit que $e^z \in \mathbb{C}_0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et que

$$1/e^z = e^{-z}.$$

De plus, comme

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a aussi

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Plus généralement, pour tout complexe $z = (x, y)$, on a

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

et il en résulte que l'on a

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}} \qquad \text{et} \qquad |e^z| = e^{\Re z}$$

(d) L'extension au plan complexe du logarithme naturel est un peu plus délicate car un nombre complexe peut être l'exponentielle naturelle de plusieurs nombres complexes. Pour comprendre ce phénomène, étudions l'équation

$$e^w = z.$$

où $z = (x, y)$ est un complexe fixé et où $w = (u, v)$ est une inconnue complexe. Vu ce qui précède, cette équation ne possède pas de solution si $z = 0$. Supposons donc que $z \neq 0$. Dans ce cas, l'équation peut se réécrire

$$z = e^u e^{iv}.$$

On en tire que l'on a

$$e^u = |z| \qquad \text{et} \qquad v = \arg(z) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Il s'ensuit que

$$w = \ln(|z|) + i \arg(z) + 2ik\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Réciproquement, on vérifie aisément que tout w de la forme précédente est une solution de l'équation étudiée. On est donc conduit naturellement à définir le *logarithme principal* de z comme étant le nombre complexe

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$$

et à appeler *logarithme* de z tout nombre complexe de la forme

$$\ln(z) + 2ik\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Il résulte des définitions que la fonction logarithme principal est bien une extension de $]0, +\infty[$ à $\mathbb{C}_0$ du logarithme naturel usuel. On remarquera que cette extension à un sens sur $]-\infty, 0[$ et que sur cet ensemble on a

$$\ln(x) = \ln(|x|) + i\pi.$$

On prendra garde au fait que la relation

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_1)$$

est valable pour des nombres complexes z_1 et z_2 si

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) \in \left]-\pi, \pi\right]$$

mais qu'elle est fausse sinon. Par exemple, $\ln((-1)(-1)) = \ln(1) = 0$ alors que $\ln(-1) + \ln(-1)) = 2i\pi$.

(e) Soit $c \in \mathbb{C}$. Ayant la fonction logarithme principal à notre disposition, il est maintenant naturel de définir la fonction *puissance c principale* en posant :[1]

$$z^c = \begin{cases} e^{c\ln(z)} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0, \Re c > 0 \\ 1 & \text{si } z = 0, c = 0 \end{cases}$$

Lorsque $c = n$ avec $n \in \mathbb{N}$ (resp. $n \in -\mathbb{N}_0$), on vérifie facilement que cette fonction coïncide sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{C}_0$) avec la fonction puissance n usuelle.

Lorsque $c = 1/n$ avec $n \in \mathbb{N}_0$, il est clair que $z^{1/n}$ est une racine n^{e} de z pour tout $z \in \mathbb{C}$. C'est pourquoi la fonction $z^{1/n}$ est aussi appelée fonction *racine n^{e} principale* de z et notée $\sqrt[n]{z}$.

En travaillant avec les puissances principales, on prendra garde au fait que l'égalité

$$(z_1 z_2)^c = z_1^c z_2^c$$

a lieu si $\arg(z_1) + \arg(z_2) \in \left]-\pi, \pi\right]$ mais qu'elle peut ne pas avoir lieu si cette condition n'est pas remplie. Par exemple, on a $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ alors que $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$.

(d) Comme

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

si z est réel, on convient d'étendre les fonctions cosinus et sinus au plan complexe au moyen de ces formules. On vérifiera à titre d'exercice que les zéros de ces fonctions dans $\mathbb{C}$ sont réels et sont donc respectivement de la forme $\pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et de la forme $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Il s'ensuit que les formules

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

fournissent des extensions naturelles des fonctions cotangente et tangente usuelles à $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\pi)$ et à $\mathbb{C} \setminus (\pi/2 + \mathbb{Z}\pi)$.

(e) Nous renvoyons aux séances d'exercices pour l'étude des extensions complexes des fonctions arccos, arcsin, arccotg et arctg.

1. Cette définition réserve des surprises comme on peut s'en apercevoir en calculant i^i

Comme une fonction complexe f définie sur une partie de $\mathbb{C}$ n'est rien d'autre que la donnée d'une application d'une partie du plan numérique $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, nous pouvons étudier f au moyen des outils usuels de l'analyse réelle. En particulier, nous savons déjà ce qu'est une limite de f en $z_0 \in \overline{A}$, ce que signifie la continuité de f en $z_0 \in A$ ou ce que signifie la dérivabilité de f en $z_0 \in A^\circ$. Rappelons néanmoins le résultat suivant :

Proposition 1.2.2. *Soit $f(z)$ une fonction complexe définie sur une partie A de $\mathbb{C}$ et soient $u(x,y)$ et $v(x,y)$ les parties réelles et imaginaires de f vues comme fonctions des parties réelles et imaginaires de z. Alors,*

(a) si $z_0 \in \overline{A}$ on a

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ z \in A}} f(z) = w_0$$

si et seulement si

$$\lim_{\substack{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in A}} u(x,y) = u_0, \qquad \lim_{\substack{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in A}} v(x,y) = v_0, \qquad w_0 = u_0 + iv_0;$$

(b) f est continu en $z_0 \in A$ si et seulement si $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont continus en (x_0, y_0) ;

(c) f est dérivable en $z_0 \in A^\circ$ si et seulement si $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont dérivables en (x_0, y_0).

(d) f est de classe C_p sur A° si et seulement si $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont de classe C_p sur A°.

Exemples 1.2.3.

(a) Les fonctions $\Re z$, $\Im z$, z et $\overline{z}$ sont de classe C_∞ sur $\mathbb{C}$.

(b) La fonction $|z|$ est continue sur $\mathbb{C}$ mais n'est de classe C_p ($p \geq 1$) que sur $\mathbb{C}_0$.

(c) Vu les formules liant les fonctions argument principal et arc tangente, il est clair que la fonction $\arg(z)$ est de classe C_∞ sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ mais n'est continue en aucun point de $]-\infty, 0]$. En effet, si $x_0 \in]-\infty, 0[$, on a

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow x_0 \\ \Im z > 0}} \arg(z) = \pi, \qquad \lim_{\substack{z \longrightarrow x_0 \\ \Im z < 0}} \arg(z) = -\pi$$

et, si $x_0 = 0$, on a

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow x_0 \\ \Re z = 0, \Im z > 0}} \arg(z) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{\substack{z \longrightarrow x_0 \\ \Re z = 0, \Im z < 0}} \arg(z) = -\frac{\pi}{2}.$$

(d) Comme on a

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

pour tout nombre complexe $z = (x, y)$, il est clair que la fonction e^z est de classe C_∞ sur $\mathbb{C}$.

(e) Comme

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$$

si $z \in \mathbb{C}$, il découle donc de (c) que la fonction $\ln(z)$ est de classe C_∞ sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ et n'est continue en aucun point de $]-\infty, 0]$.

1.3 Dérivées des fonctions complexes d'une variable complexe

Considérons maintenant une fonction $f(z)$ de classe C_1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et un point $z_0 \in \Omega$. Grâce au théorème des accroissements finis pour les fonctions réelles de deux variables réelles, nous savons que

$$\begin{aligned} u(x,y) = u(x_0,y_0) &+ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ o(d((x,y),(x_0,y_0))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x,y) = v(x_0,y_0) &+ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ o(d((x,y),(x_0,y_0))) \end{aligned}$$

si $(x, y) \to (x_0, y_0)$. On en tire que

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(y-y_0) + o(|z-z_0|)$$

si $z \to z_0$. Tentons de réécrire cette formule en ne faisant plus apparaître $x - x_0$ et $y - y_0$ mais $z - z_0$ et $\overline{z - z_0}$. Il vient

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\frac{(z-z_0)+\overline{(z-z_0)}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\frac{(z-z_0)-\overline{(z-z_0)}}{2i} \\ &\quad + o(|z-z_0|) \\ &= f(z_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)(z-z_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)\overline{(z-z_0)} + o(|z-z_0|) \end{aligned}$$

On est donc conduit naturellement à introduire la définition suivante :

Définition 1.3.1. Si f est de classe C_1 sur l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$, on pose

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Cela étant, ce qui précède montre que :

Proposition 1.3.2. *Si f est de classe C_1 sur l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et si $z_0 \in \Omega$ alors*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{(z - z_0)} + o(|z - z_0|)$$

si $z \to z_0$

Remarque 1.3.3. Si f est de classe C_1 sur l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ alors la connaissance de

$$\frac{\partial f}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$

permet de retrouver

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right).$$

De plus, on a

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \qquad \text{et} \qquad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

Exemples 1.3.4.

(a) Sur $\mathbb{C}$ et on a

$$\frac{\partial \Re z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \Re z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Re z}{\partial z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \Re z}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial \Im z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Im z}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial \Im z}{\partial z} = -\frac{i}{2}, \quad \frac{\partial \Im z}{\partial \overline{z}} = \frac{i}{2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0,$$

$$\frac{\partial \overline{z}}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \overline{z}}{\partial y} = -i, \quad \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1.$$

(b) Sur $\mathbb{C}_0$, on a

$$\frac{\partial |z|}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial |z|}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial |z|}{\partial z} = \frac{1}{2}\,\frac{\overline{z}}{|z|}, \quad \frac{\partial |z|}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\,\frac{z}{|z|}.$$

(c) Sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, on a

$$\frac{\partial \arg(z)}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial \arg(z)}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial \arg(z)}{\partial z} = \frac{-i}{2z} \qquad \frac{\partial \arg(z)}{\partial \overline{z}} = \frac{i}{2\overline{z}}.$$

(d) Sur $\mathbb{C}$ on a

$$\frac{\partial e^z}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad \frac{\partial e^z}{\partial y} = e^x(-\sin y + i \cos y)$$

$$\frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z, \qquad \frac{\partial e^z}{\partial \overline{z}} = 0.$$

(e) Sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, on a

$$\frac{\partial \ln(z)}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \ln(z)}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2}.$$

On en tire que sur cet ouvert on a aussi

$$\frac{\partial \ln(z)}{\partial z} = \frac{1}{z} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \ln(z)}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Pour traiter des exemples plus évolués, il est utile de pouvoir calculer directement les dérivées d'une expression à partir de celles des fonctions qui y figurent. On dispose pour cela des théorèmes usuels de l'analyse réelle auxquels on peut joindre les résultats suivants :

Proposition 1.3.5. *Soient f et g des fonctions de classe C_1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et soient c, d des nombres complexes. Alors, pour $D \in \{\partial/\partial z, \partial/\partial \overline{z}\}$, on a*

$$D(cf + dg) = cDf + dDg$$

$$D(fg) = gDf + fDg$$

et par conséquent,

$$D(f/g) = (gDf - fDg)/g^2$$

si g ne s'annule pas sur Ω.

Démonstration. Ces formules sont connues pour $D \in \{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$ et celles pour $D \in \{\partial/\partial z, \partial/\partial \overline{z}\}$ en sont des combinaisons linéaires. $\square$

Exemples 1.3.6.
(a) Puisque

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2},$$

ces fonctions sont de classe C_∞ sur $\mathbb{C}$ et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos z}{\partial z} &= -\sin z \qquad & \frac{\partial \cos z}{\partial \overline{z}} &= 0 \\ \frac{\partial \sin z}{\partial z} &= \cos z \qquad & \frac{\partial \sin z}{\partial \overline{z}} &= 0 \end{aligned}$$

(b) La fonction z^n est de classe C_∞ sur $\mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et on a

$$\frac{\partial z^n}{\partial z} = nz^{n-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial z^n}{\partial \overline{z}} = 0$$

sur cet ouvert.
(c) La fonction z^{-n} est de classe C_∞ sur $\mathbb{C}_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et on a

$$\frac{\partial z^{-n}}{\partial z} = -nz^{-n-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial z^n}{\partial \overline{z}} = 0$$

sur cet ouvert.
(d) Les fonctions

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \left(\text{resp. } \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}\right)$$

sont de classe C_∞ sur $\mathbb{C} \setminus (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi)$ (resp. $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\pi)$) et sur cet ouvert on a

$$\frac{\partial \operatorname{tg} z}{\partial z} = \frac{1}{\cos^2 z} \qquad \left(\text{resp. } \frac{\partial \operatorname{cotg} z}{\partial z} = \frac{-1}{\sin^2 z}\right)$$

et

$$\frac{\partial \operatorname{tg} z}{\partial \overline{z}} = 0 \qquad \left(\text{resp. } \frac{\partial \operatorname{cotg} z}{\partial \overline{z}} = 0\right).$$

Lemme 1.3.7. *Soit $f(z)$ une fonction de classe C_1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et soit $\gamma(t)$ une application de classe C_1 de $]a,b[\subset \mathbb{R}$ dans Ω. Alors, $f \circ \gamma$ est de classe C_1 sur $]a,b[$ et*

$$(f \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\gamma'(t) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\gamma(t))\overline{\gamma}'(t).$$

Démonstration. Soit $t_0 \in]a,b[$ et soit $z_0 = \gamma(t_0)$. On sait que

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)(\overline{z - z_0}) + o(z - z_0)$$

si $z \to z_0$. Il s'ensuit que

$$f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(\gamma(t) - \gamma(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)(\overline{\gamma(t)} - \overline{\gamma(t_0)}) + o(t - t_0)$$

si $t \to t_0$. La conclusion en découle en divisant par $t - t_0$ et en faisant tendre t vers t_0. □

Proposition 1.3.8. *Soit $f(z)$ (resp. $F(w)$) une fonction de classe C_1 sur un ouvert Ω (resp. U) de $\mathbb{C}$. Supposons que $f(\Omega) \subset U$. Alors $F \circ f$ est de classe C_1 sur Ω et pour $D \in \{\partial/\partial z, \partial/\partial \overline{z}\}$ on a*

$$D(F \circ f) = \left(\frac{\partial F}{\partial w} \circ f\right) Df + \left(\frac{\partial F}{\partial \overline{w}} \circ f\right) D\overline{f}.$$

Démonstration. Le théorème de dérivation des fonctions composées montre de suite que $F \circ f$ est de classe C_1 sur Ω. La formule à établir étant linéaire en D, on peut se contenter de la démontrer pour $D \in \{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$. Dans ce cas, elle découle directement du lemme précédent en prenant un $\gamma(t)$ du type $z_0 + t$ ou $z_0 + it$. □

Exemples 1.3.9. (a) Soit $c \in \mathbb{C}$. Puisque

$$z^c = e^{c \ln(z)}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}_0$ et puisque $\ln(z)$ est de classe C_∞ sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, il résulte de la proposition précédente que la fonction z^c est de classe C_∞ sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ et que l'on a

$$\frac{\partial z^c}{\partial z} = c z^{c-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial z^c}{\partial \overline{z}} = 0$$

sur cet ouvert.

(b) Nous renvoyons aux séances d'exercices pour le calcul des dérivées des fonctions arcsin, arccos, arctg, arccotg.

1.4 Courbes du plan complexe

La notion de courbe plane est une de ces notions qui semble intuitivement claire mais qui est assez difficile à formaliser mathématiquement. Pour éviter différentes difficultés techniques et obtenir une notion de courbe à la fois proche de l'intuition et facilement utilisable dans les applications, nous adopterons les définitions suivantes :

Définition 1.4.1. Un *arc* (compact simple régulier) de $\mathbb{C}$ est une partie Γ de $\mathbb{C}$ qui est l'image d'un intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$ par un paramétrage (simple régulier) i. e. par une application injective

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

de classe C_1 telle que $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$.

Remarque 1.4.2. La définition précédente combinée au théorème des fonctions implicites assure que si $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ sont deux paramétrages du même arc Γ, alors il existe un unique changement de variable $\varphi_{12} : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ de classe C_1 pour lequel

$$\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi_{12}.$$

Comme φ_{12} est alors strictement monotone, on a alors

$$\varphi_{12}(]a_2, b_2[) =]a_1, b_1[$$

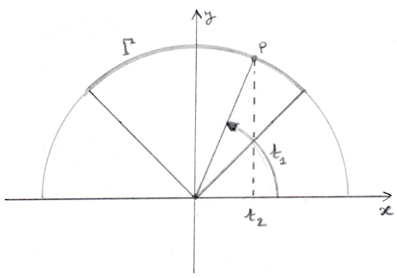
et

$$\varphi_{12}(\{a_2, b_2\}) = \{a_1, b_1\}.$$

Définition 1.4.3. Soit Γ un arc de $\mathbb{C}$ et soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un paramétrage de Γ. Vu la remarque précédente, l'ensemble $\{\gamma(a)), \gamma(b)\}$ ne dépend que de Γ et pas du paramétrage γ choisi. Cet ensemble sera appelé le *bord* de Γ dans la suite. Nous le noterons $\partial\Gamma$.

Exemple 1.4.4. Le quart de cercle

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \Im z \geq |\Re z|\}$$



est un arc de $\mathbb{C}$. Il peut être paramétré par

$$\gamma_1(t_1) = e^{it_1}; \qquad t_1 \in [\pi/4, 3\pi/4]$$

ou par

$$\gamma_2(t_2) = t_2 + i\sqrt{1-t_2^2}; \qquad t_2 \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

On a $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi_{12}$ avec

$$\varphi_{12}(t_2) = \arccos t_2; \qquad t_2 \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

et $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi_{21}$ avec

$$\varphi_{21}(t_1) = \cos t_1; \qquad t_1 \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

Le bord de Γ est donné par

$$\partial\Gamma = \left\{e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Définition 1.4.5. Une *courbe* (compacte simple régulière par morceaux) de $\mathbb{C}$ est une partie C de $\mathbb{C}$ qui peut s'écrire sous la forme $\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_J$ où les Γ_j sont des arcs de $\mathbb{C}$ tels que

(i) $\Gamma_j \cap \Gamma_k \subset \partial\Gamma_j \cap \partial\Gamma_k$,

(ii) $\Gamma_j \cap \Gamma_k \cap \Gamma_l = \emptyset$

si j, k, l sont des éléments deux à deux distincts de $\{1, \ldots, J\}$. La donnée d'arcs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_J$ vérifiant ces propriétés est appelée un *découpage en arcs* de la courbe C.

Remarque 1.4.6. On vérifie aisément que toute courbe au sens précédent est une union finie de courbes connexes et que si une courbe est connexe, alors on peut trouver un découpage $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_J$ en arcs de C et des points A_j, B_j de sorte que $\partial\Gamma_j = \{A_j, B_j\}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$ et que $A_{j+1} = B_j$ si $j \in \{1, \ldots, J-1\}$. Deux cas de figure se présentent alors.

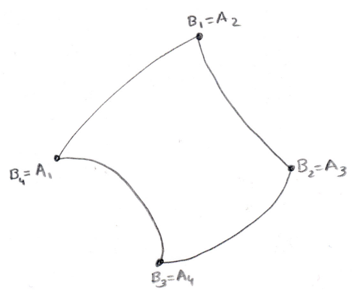
(a) Cas $A_1 = B_J$.

(b) Cas $A_1 \neq B_J$.

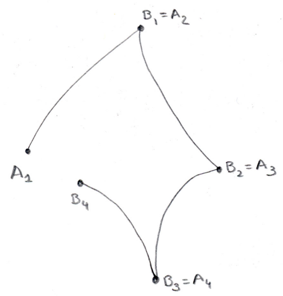
Dans le premier cas, $C \setminus \{P\}$ est connexe quelque soit $P \in C$. Dans ce second, $C \setminus \{P\}$ est connexe si $P \in \{A_1, B_J\}$ et possède deux composantes connexes si P est un autre point de C.

Définition 1.4.7. Dans le cas (a) (resp. (b)), considéré dans la remarque précédente, la courbe connexe C sera dite *sans bord* (resp. *à bord*) et le bord de C sera $\partial C = \emptyset$ (resp. $\partial C = \{A_1, B_J\}$). Plus généralement, une courbe C sera dite *sans bord* (resp. *à bord*) si toutes ses composantes connexes (resp. une de ses composantes connexes) sont sans bord (resp. est à bord) et le bord de C sera alors l'union des bords de ses composantes connexes.

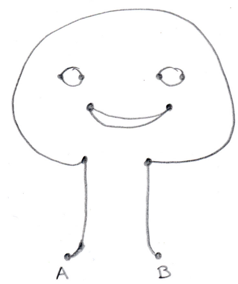
Exemples 1.4.8.



Cas « connexe sans bord »
$\partial\Gamma = \emptyset$



Cas « connexe à bord »
$\partial\Gamma = \{A_1, B_4\}$



Cas « général »
$\partial\Gamma = \{A, B\}$

1.5 Intégrales curvilignes de première espèce dans $\mathbb{C}$

Soit Γ un arc de $\mathbb{C}$, soient $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ deux paramétrages de Γ et soit f une fonction définie sur Γ. Comme on l'a rappelé plus haut, il existe alors un changement de variable $\varphi_{12} : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ de classe C_1 pour lequel $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi_{12}$. On a alors

$$f(\gamma_2(t_2))|\gamma_2'(t_2)| = f(\gamma_1(\varphi_{12}(t_2)))|\gamma_1'(\varphi_{12}(t_2))||\varphi_{12}'(t_2)|$$

et le théorème d'intégration par changement de variable montre que

$$f(\gamma_2(t_2))|\gamma_2'(t_2)| \in L_1([a_2, b_2])$$

si et seulement si

$$f(\gamma_1(t_1))|\gamma_1'(t_1)| \in L_1([a_1, b_1])$$

et que dans ce cas,

$$\int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(t_2))|\gamma_2'(t_2)|\, dt_2 = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t_1))|\gamma_1'(t_1)|\, dt_1.$$

Il est donc licite d'introduire la définition suivante :

Définition 1.5.1. Soit Γ un arc de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction définie sur Γ. Nous dirons que f est intégrable sur Γ si

$$f(\gamma(t))|\gamma'(t)|$$

est intégrable sur $[a, b]$ lorsque $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est un paramétrage de Γ. Dans ce cas, nous poserons

$$\int_\Gamma f \, dL = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)| \, dt.$$

Remarque 1.5.2. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est un paramétrage de l'arc Γ, on sait que γ' est continu sur $[a, b]$. Comme γ est également continu sur $[a, b]$, il en résulte que toute fonction f qui est continue sur Γ y est intégrable. De plus, dans ce cas, l'intégrale de f sur Γ peut s'interpréter à la Cauchy-Riemann de la manière suivante :

Proposition 1.5.3. *Soit γ un paramétrage de l'arc Γ et soit f une fonction continue sur Γ. Considérons des découpages*

$$a = a_{m,0} < a_{m,1} < \cdots < a_{m,J_m} = b$$

de $[a, b]$ pour $m \geq 0$ tels que

$$h_m = \sup_{j \in \{1,\ldots,J_m\}} |a_{m,j} - a_{m,j-1}| \to 0$$

si $m \to \infty$. Fixons des points $t_{m,j} \in [a_{m,j-1}, a_{m,j}]$ pour $j = 1, \ldots, J_m$. Alors,

$$\int_\Gamma f \, dL = \lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{J_m} f(\gamma(t_{m,j}))|\gamma(a_{m,j}) - \gamma(a_{m,j-1})|.$$

Démonstration. On a

$$\sum_{j=1}^{J_m} f(\gamma(t_{m,j}))|\gamma(a_{m,j}) - \gamma(a_{m,j-1})|$$
$$= \int_\mathbb{R} \sum_{j=1}^{J_m} f(\gamma(t_{m,j})) \frac{|\gamma(a_{m,j}) - \gamma(a_{m,j-1})|}{a_{m,j} - a_{m,j-1}} \chi_{]a_{m,j-1}, a_{m,j}[}(t) \, dt.$$

Posons

$$f_m(t) = \sum_{j=1}^{J_m} f(\gamma(t_{m,j})) \frac{|\gamma(a_{m,j}) - \gamma(a_{m,j-1})|}{a_{m,j} - a_{m,j-1}} \chi_{]a_{m,j-1}, a_{m,j}[}(t).$$

Fixons $t_0 \in \,]a, b]$. Pour tout $m \geq 0$, il existe un et un seul j_m tel que $t_0 \in \,]a_{m,j_m-1}, a_{m,j_m}]$ et on a

$$f_m(t_0) = f(\gamma(t_{m,j_m})) \frac{|\gamma(a_m, j_m) - \gamma(a_{m,j_m-1})|}{a_{m,j_m} - a_{m,j_m-1}}.$$

Comme les suites a_{m,j_m}, a_{m,j_m-1} convergent vers t_0 et comme

$$\gamma(a_{m,j_m}) - \gamma(a_{m,j_m-1}) = \int_{a_{m,j_m-1}}^{a_{m,j_m}} \gamma'(t)\, dt,$$

il est clair que

$$\frac{\gamma(a_m, j_m) - \gamma(a_{m,j_m-1})}{a_{m,j_m} - a_{m,j_m-1}} \to \gamma'(t_0)$$

et que

$$\left| \frac{\gamma(a_m, j_m) - \gamma(a_{m,j_m-1})}{a_{m,j_m} - a_{m,j_m-1}} \right| \leq \sup_{t\in[a,b]} |\gamma'(t)|.$$

On en tire que

$$f_m(t_0) \to f(\gamma(t_0))|\gamma'(t_0)|$$

si $m \to \infty$ et que

$$|f_m(t_0)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \sup_{t\in[a,b]} |\gamma'(t)|.$$

La conclusion résulte alors du théorème de la convergence majorée de Lebesgue. □

Définition 1.5.4. Dans le cas où f est la constante 1, le résultat précédent montre qu'il est naturel d'appeler *longueur* de Γ la valeur L_Γ de

$$\int_\Gamma dL.$$

Exemple 1.5.5. Considérons le demi-cercle

$$\Gamma = \{z : |z| = 1, \Im z \geq 0\}$$

paramétré par

$$\gamma(t) = e^{it}, \qquad t \in [0, \pi]$$

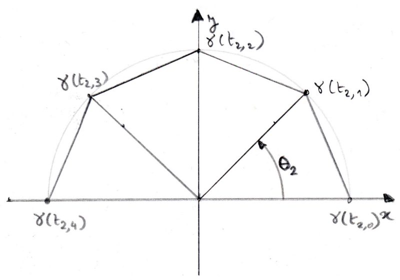
et posons

$$a_{m,j} = j2^{-m}\pi \qquad \text{et} \qquad J_m = 2^m.$$

Alors,

$$\sum_{j=1}^{J_m} |\gamma(a_{m,j}) - \gamma(a_{m,j-1})| = J_m c_m$$

où c_m est la corde d'un arc de cercle d'angle au centre $\theta_m = 2^{-m}\pi$.



On a donc $c_m = 2\sin(\theta_m/2) = 2\sin(2^{-m-1}\pi)$ et

$$\sum_{j=1}^{J_m} |\gamma(a_{m,j}) - \gamma(a_{m,j-1})| = 2^{m+1}\sin(\pi/2^{m+1})$$

converge bien vers $\pi = L_\Gamma$ si $m \to \infty$.

Proposition 1.5.6. *Si Γ est un arc de $\mathbb{C}$ et si f est continu sur Γ, on a*

$$\left|\int_\Gamma f\ dL\right| \leq \sup_\Gamma |f| L_\Gamma.$$

Démonstration. Cela résulte directement des définitions et de la formule

$$\int_\Gamma f\ dL = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\ dt$$

valable pour tout paramétrage $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de Γ. □

Essayons à présent de comprendre quelle est la latitude que l'on a dans le choix d'un découpage en arcs d'une courbe C de $\mathbb{C}$.

Définition 1.5.7. Soient $\Gamma_{1,1}, \ldots, \Gamma_{1,J_1}$ et $\Gamma_{2,1}, \ldots, \Gamma_{2,J_2}$ deux découpages de la courbe C en arcs. Nous dirons que le premier découpage est plus fin que le second si tout arc du premier découpage est inclus dans un arc du second.

Proposition 1.5.8. *Quelques soient les découpages en arcs*

$$\Gamma_{1,1}, \ldots, \Gamma_{1,J_1} \qquad et \qquad \Gamma_{2,1}, \ldots, \Gamma_{2,J_2}$$

de la courbe C, il existe un troisième découpage en arcs $\Gamma_{3,1}, \ldots, \Gamma_{3,J_3}$ de la courbe C plus fin que les deux précédents.

Démonstration. Il suffit de définir les $\Gamma_{3,j}$ comme les adhérences des composantes connexes de

$$C \setminus (\partial\Gamma_{1,1} \cup \cdots \cup \partial\Gamma_{1,J_1} \cup \partial\Gamma_{2,1} \cup \cdots \cup \partial\Gamma_{2,J_2}).$$

□

Proposition 1.5.9. *Soit f une fonction définie sur la courbe C de $\mathbb{C}$. Soient $\Gamma_{1,1}, \ldots, \Gamma_{1,J_1}$ et $\Gamma_{2,1}, \ldots, \Gamma_{2,J_2}$ deux découpages en arcs de C. Alors l'intégrabilité de f sur chaque $\Gamma_{2,j}$ est équivalente à l'intégrabilité de f sur chaque $\Gamma_{1,j}$ et dans ce cas*

$$\sum_{j=1}^{J_1} \int_{\Gamma_{1,j}} f \, dL = \sum_{j=1}^{J_2} \int_{\Gamma_{2,j}} f \, dL.$$

Démonstration. Si le premier découpage est plus fin que le second, cela résulte directement des définitions et de l'additivité de l'intégrale des fonctions d'une variable réelle. Pour obtenir le cas général, il suffit alors d'utiliser la proposition précédente. □

Le résultat précédent nous permet d'introduire la définition suivante :

Définition 1.5.10. Soit C une courbe de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction définie sur C. Nous dirons que f est intégrable sur C si f est intégrable sur chacun des arcs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_J$ d'un découpage en arcs de C. Dans ce cas, nous poserons

$$\int_C f \, dL = \sum_{j=1}^{J} \int_{\Gamma_j} f \, dL$$

et

$$L_C = \sum_{j=1}^{J} L_{\Gamma_j}.$$

Proposition 1.5.11. *Si f est continu sur la courbe C alors f est intégrable sur C et on a*

$$\left| \int_C f \, dL \right| \leq \sup_C |f| L_C.$$

Démonstration. Cela découle directement des définitions et de la Proposition 1.5.6. □

1.6 Courbes orientées du plan complexe

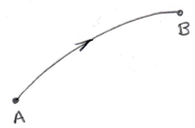
Définition 1.6.1. Soit Γ un arc de $\mathbb{C}$ et soient $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ deux paramétrages de Γ. Nous savons qu'il existe un unique changement de variable φ_{12} de classe C_1 tel que

$$\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi_{12}$$

et que φ'_{12} est strictement positif ou strictement négatif sur $[a_2, b_2]$. Dans le premier cas, nous dirons que γ_1 et γ_2 ont *même orientation* et dans le second cas, nous dirons que γ_1 et γ_2 ont des *orientations opposées*. La relation « avoir la même orientation que »est une relation d'équivalence qui partage les paramétrages de Γ en deux classes appelées *orientations* de Γ. Un *arc orienté* de $\mathbb{C}$ est la donnée d'un arc de $\mathbb{C}$ et d'une de ses orientations.

Soit Γ un arc orienté de $\mathbb{C}$. Si γ_1 et γ_2 sont des paramétrages de la classe d'orientation de Γ, il est clair que $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ et que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$. Ces points sont donc canoniquement associés à l'arc orienté Γ. On dit que le premier est l'*origine* de Γ et que le second est son extrémité. L'arc orienté obtenu en changeant l'orientation de Γ sera noté Γ^-. Bien sûr, l'origine (resp. l'extrémité) de Γ^- est l'extrémité (resp. l'origine) de Γ.

Remarque 1.6.2. On vérifie aisément que le choix d'une orientation d'un arc Γ revient au choix de son origine A ou de son extrémité B. On la matérialise par une flèche tracée sur Γ qui pointe de A vers B.



Définition 1.6.3. Soit Γ un arc orienté de $\mathbb{C}$ et soit $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ deux paramétrages de la classe d'orientation de Γ. Notons

$$\varphi_{12} : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$$

le changement de variables C_1 tel que

$$\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi_{12}.$$

Alors, de la relation

$$\gamma_2'(t_2) = \gamma_1'(\varphi_{12}(t_2))\varphi_{12}'(t_2)$$

et du fait que $\varphi_{12}'(t_2) > 0$, on tire que

$$\frac{\gamma_2'(t_2)}{|\gamma_2'(t_2)|} = \frac{\gamma_1'(\varphi_{12}(t_2))}{|\gamma_1'(\varphi_{12}(t_2))|}.$$

En particulier, si $t_1 \in [a_1, b_1]$ et $t_2 \in [a_2, b_2]$ sont tels que

$$\gamma_1(t_1) = z = \gamma_2(t_2)$$

alors

$$\frac{\gamma_2'(t_2)}{|\gamma_2'(t_2)|} = \frac{\gamma_1'(t_1)}{|\gamma_1'(t_1)|}.$$

Ce nombre complexe de module 1 ne dépend donc que de z et de Γ ; c'est le *vecteur tangent unitaire* à Γ en z. Nous le noterons $\tau(z)$.

Définition 1.6.4. Un *découpage orienté* d'une courbe C de $\mathbb{C}$ est la donnée d'un découpage en arcs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_J$ de C et d'orientations pour chaque Γ_j de sorte que deux arcs distincts n'aient ni la même origine, ni la même extrémité.

Une découpage orienté d'une courbe C de $\mathbb{C}$ est *plus fin* qu'une *autre découpage orienté* de C si tout arc du premier découpage est inclus dans un arc du second et si les orientations de ces arcs sont compatibles.

Deux découpages orientés d'une courbe de $\mathbb{C}$ sont *équivalents* s'il existe un découpage orienté plus fin que chacun d'eux.

Une *orientation* de C est une classe d'équivalence de découpages orientés de C.

Une *courbe orientée* est la donnée d'une courbe C et d'une de ses orientations.

Remarque 1.6.5. On vérifie aisément qu'orienter une courbe C revient à orienter chacune de ses composantes connexes et qu'orienter une courbe connexe revient à donner un découpage orienté $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_J$ de C telle que pour tout $j \in \{1, \ldots, J-1\}$, l'origine de Γ_{j+1} soit l'extrémité de Γ_j. Si C est à bord, alors l'origine de Γ_1 (resp. l'extrémité de Γ_J) est un point de ∂C qui ne dépend que de l'orientation choisie sur C ; on dit que c'est l'*origine* (resp. l'*extrémité*) de C. De plus, on vérifie aisément que dans ce cas la donnée de l'origine ou de l'extrémité de C détermine l'orientation de C.

1.7 Formes différentielles complexes d'une variable complexe

Rappelons qu'une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ est dite *différentiable* en $p_0 \in \Omega$ s'il existe une application linéaire $T_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

$$f(p) = f(p_0) + T_0(p - p_0) + o(|p - p_0|) \qquad (*)$$

pour $p \longrightarrow p_0$ dans Ω. Dans ce cas, on a

$$T_0(h) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(p_0 + th) - f(p_0)}{t} \qquad (**)$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Cela montre que f est dérivable dans la direction du vecteur h pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que l'application T_0 qui figure dans (*) est unique. On dit que l'application linéaire T_0 est la *différentielle de f en p_0* et on la note $d_{p_0}f$. De (**) on déduit aisément que f est dérivable en p_0 et que la matrice de T_0 par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est la matrice jacobienne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$$

de f. En d'autres termes, on a

$$d_{p_0}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) d_{p_0}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0) d_{p_0}x_n$$

où $d_{p_0}x_j$ est la différentielle en p_0 de la fonction x_j qui associe à tout $p \in \mathbb{R}^n$ sa j^{e} coordonnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Rappelons également que le théorème des accroissements finis montre que toute fonction de classe C_1 sur Ω est différentiable en tout point de Ω. Dans le cas des fonctions complexes d'une variable complexe, on a $m = n = 2$ et une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (Ω ouvert de $\mathbb{C}$) est donc différentiable en $z_0 \in \Omega$ si et seulement s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $T_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = f(z_0) + T_0(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

pour $z \to z_0$. La fonction f est alors dérivable en z_0 et on a

$$d_{z_0}f = T_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)d_{z_0}x + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)d_{z_0}y.$$

Dans la suite, nous utiliserons plutôt la forme complexe suivante de cette formule.

Proposition 1.7.1. *Soit f une fonction complexe définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Supposons que f soit différentiable en $z_0 \in \Omega$. Alors*

$$d_{z_0}f = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)d_{z_0}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)d_{z_0}\overline{z}.$$

Démonstration. Un calcul direct montre que l'on a

$$(d_{z_0}z)(h) = h \qquad \text{et} \qquad (d_{z_0}\overline{z})(h) = \overline{h}.$$

La conclusion résulte alors de ce que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)h + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)h_y$$

si $h = (h_x, h_y)$. □

La différentielle d'une fonction complexe d'une variable complexe fournit un exemple de la notion plus générale de forme différentielle complexe dont la définition est rappelée ci-dessous.

Définition 1.7.2. Une *forme différentielle complexe* sur une partie A de $\mathbb{C}$ est une application $\omega : A \to L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ c'est-à-dire une loi qui associe une application $\mathbb{R}$-linéaire $\omega(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ à chaque $z \in A$.

Remarque 1.7.3. Soit ω une forme différentielle complexe définie sur une partie A de $\mathbb{C}$. On vérifie aisément que ω s'écrit de manière unique sous la forme

$$\omega = pdx + qdy \qquad (\text{resp. } fdz + gd\overline{z})$$

où p, q (resp. f, g) sont des fonctions complexes définies sur A et que ω est continu sur A si et seulement s'il en est ainsi de p et q (resp. f et g). De même, ω sera de classe C_p sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ si et seulement s'il en est ainsi de p et q (resp. f et g).

1.8 Intégrales curvilignes de seconde espèce dans $\mathbb{C}$

Soit Γ un arc orienté de $\mathbb{C}$ et soit $\omega = pdx + qdy$ une forme différentielle complexe définie sur Γ. Considérons deux paramétrages $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ de la classe d'orientation de Γ et notons $\varphi_{12} : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ le changement de variable C_1 tel que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi_{12}$. Alors,

$$\begin{aligned} &p(\gamma_2(t_2))\gamma'_{2x}(t_2) + q(\gamma_2(t_2))\gamma'_{2y}(t_2) \\ &\qquad = \left[p(\gamma_1(\varphi_{12}(t_2)))\gamma'_{1x}(\varphi_{12}(t_2)) + q(\gamma_1(\varphi_{12}(t_2)))\gamma'_{1y}(\varphi_{12}(t_2))\right] \varphi'_{12}(t_2). \end{aligned}$$

Comme $\varphi'_{12}(t_2) > 0$, il en résulte en particulier que

$$p(\gamma_2(t_2))\gamma'_{2x}(t_2) + q(\gamma_2(t_2))\gamma'_{2y}(t_2) \in L_1([a_2, b_2])$$

si et seulement si

$$p(\gamma_1(t_1))\gamma'_{1x}(t_1) + q(\gamma_1(t_1))\gamma'_{1y}(t_1) \in L_1([a_1, b_1])$$

et que

$$\begin{aligned} &\int_{a_2}^{b_2} p(\gamma_2(t_2))\gamma'_{2x}(t_2) + q(\gamma_2(t_2))\gamma'_{2y}(t_2)\, dt_2 \\ &\qquad = \int_{a_1}^{b_1} p(\gamma_1(t_1))\gamma'_{1x}(t_1) + q(\gamma_1(t_1))\gamma'_{1y}(t_1)\, dt_1. \end{aligned}$$

Il en résulte que la définition suivante est licite.

Définition 1.8.1. Soit Γ un arc orienté de $\mathbb{C}$ et soit $\omega = pdx + qdy$ une forme différentielle définie sur Γ. Nous dirons que ω est intégrable sur Γ si et seulement si

$$p(\gamma(t))\gamma'_x(t) + q(\gamma(t))\gamma'_y(t) \in L_1([a, b])$$

lorsque $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est un paramétrage de la classe d'orientation de γ. Dans ce cas, nous poserons

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \left[p(\gamma(t))\gamma'_x(t) + q(\gamma(t))\gamma'_y(t)\right]\, dt.$$

Remarque 1.8.2. Plaçons nous dans les conditions de la définition précédente et notons τ le champ de vecteurs tangents unitaires associé à Γ. Alors :

(a) La forme différentielle

$$\omega = pdx + qdy$$

est intégrable sur Γ si et seulement si

$$p\tau_x + q\tau_y$$

est intégrable sur Γ et, dans ce cas, on a

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma (p\tau_x + q\tau_y)\, dL.$$

(b) La forme différentielle

$$\omega = f dz + g d\overline{z}$$

est intégrable sur Γ si et seulement si

$$f(\gamma(t))\gamma'(t) + g(\gamma(t))\overline{\gamma}'(t) \in L_1([a,b])$$

et dans ce cas,

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \left[f(\gamma(t))\gamma'(t) + g(\gamma(t))\overline{\gamma}'(t)\right]\, dt.$$

De plus, on a

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma (f\tau + g\overline{\tau})\, dL.$$

Proposition 1.8.3. *Quelques soient les découpages orientés*

$$\Gamma_{1,1}, \ldots, \Gamma_{1,J_1} \qquad et \qquad \Gamma_{2,1}, \ldots, \Gamma_{2,J_2}$$

de la courbe orientée C, il existe un troisième découpage orienté $\Gamma_{3,1}, \ldots, \Gamma_{3,J_3}$ de la courbe orientée C plus fin que les deux précédents.

Démonstration. Il suffit d'adapter la preuve de la Proposition 1.5.8 □

Proposition 1.8.4. *Soit ω une forme différentielle complexe définie sur la courbe orientée C de $\mathbb{C}$. Soient $\Gamma_{1,1}, \ldots, \Gamma_{1,J_1}$ et $\Gamma_{2,1}, \ldots, \Gamma_{2,J_2}$ deux découpages orientés de C. Alors l'intégrabilité de ω sur chaque $\Gamma_{2,j}$ est équivalente à l'intégrabilité de ω sur chaque $\Gamma_{1,j}$ et dans ce cas*

$$\sum_{j=1}^{J_1} \int_{\Gamma_{1,j}} \omega = \sum_{j=1}^{J_2} \int_{\Gamma_{2,j}} \omega.$$

Démonstration. Il suffit d'adapter la preuve de la Proposition 1.5.9. □

Le résultat précédent nous permet d'introduire la définition suivante :

Définition 1.8.5. Soit C une courbe orientée de $\mathbb{C}$ et soit ω une forme différentielle complexe définie sur C. Nous dirons que ω est intégrable sur C si ω est intégrable sur chacun des arcs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_J$ d'un découpage orienté de C. Dans ce cas, nous poserons

$$\int_C \omega = \sum_{j=1}^{J} \int_{\Gamma_j} \omega.$$

Proposition 1.8.6. *Soit C une courbe connexe orientée de $\mathbb{C}$ d'origine A et d'extrémité B et soit f une fonction de classe C_1 sur un voisinage de C. Alors*

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} = f(B) - f(A) = \int_C \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

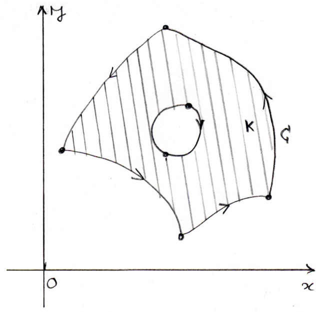
Démonstration. Cela découle directement de ce que si Γ est un arc orienté de $\mathbb{C}$ et si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un paramétrage orienté de Γ alors

$$\int_\Gamma df = \int_a^b f(\gamma(t))' dt.$$

□

1.9 Formule de Green-Riemann

Notre but dans cette section est d'établir que si K est un compact régulier[2] de $\mathbb{C}$ dont le bord est une courbe C de $\mathbb{C}$,



alors C est sans bord et admet une unique orientation pour laquelle

$$\int_K \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dxdy = \int_C pdx + qdy$$

quelques soient les fonctions p et q de classe C_1 sur un voisinage de K.

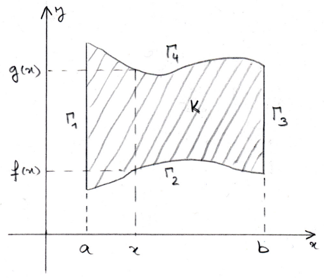
Traitons d'abord un cas facile.

2. C'est à dire si K est l'adhérence de son intérieur

Définition 1.9.1. Un compact K de $\mathbb{C}$ est *verticalement simple* si et seulement s'il existe des fonctions f et g de classe C_1 sur $[a, b]$ $(a < b)$ telles que

$$K = \{z \in \mathbb{C} : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

et pour lesquelles on a $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.



Proposition 1.9.2. *Un compact verticalement simple de $\mathbb{C}$ est régulier et sa frontière est une courbe de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Conservons les notations de la définition précédente et posons

$$\Gamma_1 = \gamma_1([f(a), g(a)]);\ \gamma_1(t) = (a, t)$$
$$\Gamma_2 = \gamma_2([a, b]);\ \gamma_2(t) = (t, f(t))$$
$$\Gamma_3 = \gamma_3([f(b), g(b)]);\ \gamma_3(t) = (b, t)$$
$$\Gamma_4 = \gamma_4([a, b]);\ \gamma_4(t) = (t, g(t)).$$

Alors, Γ_2 et Γ_3 sont des arcs de $\mathbb{C}$ et il en est de même de Γ_1 (resp. Γ_3) si $f(a) < g(a)$ (resp. $f(b) < g(b)$). Comme

$$\dot{K} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

il s'ensuit aisément que $\dot{K}$ est une courbe de $\mathbb{C}$. Quant à la régularité de K, elle est évidente puisque

$$K^\circ = \{z \in \mathbb{C} : a < x < b, f(x) < y < g(x)\}$$

□

Proposition 1.9.3. *Soit K un compact verticalement simple de $\mathbb{C}$. Conservons les notations introduites dans la preuve précédente et convenons de noter Γ_j^+ l'arc Γ_j muni de l'orientation induite par γ_j et de noter Γ_j^- l'arc Γ_j muni de l'orientation opposée. Orientons C grâce au découpage orienté $\Gamma_1^-, \Gamma_2^+, \Gamma_3^+, \Gamma_4^-$; Γ_1 (resp. Γ_3) étant omis si $f(a) = g(a)$ (resp. si $f(b) = g(b)$). Alors,*

$$\int_K \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy = \int_C pdx + qdy$$

quelques soient les fonctions p et q de classe C_1 sur un voisinage de K.

Démonstration. Calculons d'abord

$$I_p = \int_K \frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\, dxdy.$$

Par Fubini, il vient

$$I_p = \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\, dy \right]\, dx$$

et une intégration par variation de la primitive montre que

$$\begin{aligned} I_p &= \int_a^b [p(x,g(x)) - p(x,f(x))]\, dx \\ &= \int_{\Gamma_4^+} p(x,y)\, dx - \int_{\Gamma_2^+} p(x,y)\, dx. \end{aligned}$$

Puisque $\gamma'_{1x}(t) = 0$ si $t \in [f(a), g(a)]$ et que $\gamma'_{3x}(t) = 0$ si $t \in [f(b), g(b)]$, on a aussi

$$\int_{\Gamma_1^+} p(x,y)\, dx = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{\Gamma_3^+} p(x,y)\, dx = 0.$$

Il s'ensuit que

$$I_p = -\int_C p(x,y)\, dx$$

comme attendu.

Calculons maintenant

$$I_q = \int_K \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\, dxdy.$$

Par Fubini, il vient

$$I_q = \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\, dy \right]\, dx.$$

En tenant compte de nos hypothèses, le théorème de dérivation des intégrales paramétriques à bornes variables montre que

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{f(x)}^{g(x)} q(x,y)\, dy = q(x,g(x))g'(x) - q(x,f(x))f'(x) + \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\, dy.$$

Il s'ensuit que

$$I_q = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{f(x)}^{g(x)} q(x,y)\, dy \right]\, dx - \int_a^b q(x,g(x))g'(x)\, dx + \int_a^b q(x,f(x))f'(x)\, dx$$

et une intégration par variation de la primitive montre que

$$\begin{aligned}
I_q &= \int_{f(b)}^{g(b)} q(b, y)\, dy - \int_{f(a)}^{g(a)} q(a, y)\, dy - \int_a^b q(x, g(x))g'(x)\, dx \\
&\quad + \int_a^b q(x, f(x))f'(x)\, dx \\
&= \int_{\Gamma_3^+} q(x, y)\, dy - \int_{\Gamma_1^+} q(x, y)\, dy - \int_{\Gamma_4^+} q(x, y)\, dy + \int_{\Gamma_2^+} q(x, y)\, dy \\
&= \int_C q(x, y)\, dy.
\end{aligned}$$

La conclusion découle alors de ce que

$$\int \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)\, dxdy = I_q + I_p.$$

□

Remarque 1.9.4. Si on prend $q = x$ et $p = -y$, alors la formule précédente montre que

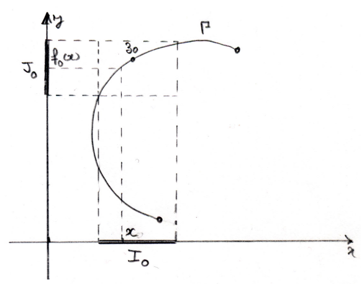
$$\int_C x\, dy - y\, dx = 2 \int_K dxdy = 2 \text{ Aire}(K) > 0.$$

Cela montre que l'orientation choisie pour C est la seule qui convienne.

Comme on l'a vu au cours oral, le résultat précédent peut s'étendre à des compacts plus généraux que les compacts verticalement simples en utilisant des techniques de découpage en parties compactes verticalement simples. Ici, nous allons plutôt traiter le cas général par des techniques de localisation.

Lemme 1.9.5. *Soit Γ un arc de $\mathbb{C}$ et z_0 un point de $\Gamma \backslash \partial\Gamma$. Supposons que la tangente à Γ en z_0 ne soit pas verticale. Alors, il existe des intervalles ouverts I_0 (resp. J_0) de $\mathbb{R}$ contenant x_0 (resp. y_0) pour lesquels il existe une fonction $f_0 : I_0 \to J_0$ de classe C_1 telle que*

$$\Gamma \cap (I_0 \times J_0) = \{z \in \mathbb{C} : y = f_0(x)\}.$$



Démonstration. Cela résulte du théorème du rang constant. On peut aussi l'établir directement en procédant comme suit.

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un paramétrage de Γ et soit $t_0 \in [a,b]$ tel que $\gamma(t_0) = z_0$. Comme la tangente à Γ en z_0 n'est pas verticale, $\gamma_x'(t_0) \neq 0$ et il existe un sous-intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$ de $[a,b]$ contenant t_0 et un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant x_0 tels que

$$\gamma_x :]\alpha,\beta[\to I$$

soit un changement de variable de classe C_1. Comme $\gamma : [a,b] \to \Gamma$ est un homéomorphisme, il existe un sous-intervalle ouvert I_0 de I contenant x_0 et un intervalle ouvert J_0 de $\mathbb{R}$ contenant y_0 tels que

$$\Gamma \cap (I_0 \times J_0) \subset \gamma(]\alpha,\beta[).$$

De plus, quitte à restreindre I_0, on peut aussi supposer que

$$I_0 \subset \gamma_x\left(]\alpha,\beta[\cap \gamma_y^{-1}(J_0)\right).$$

Par construction, $]\alpha,\beta[\cap \gamma_x^{-1}(I_0)$ est alors un sous-intervalle $]\alpha_0,\beta_0[$ de $]\alpha,\beta[$ tel que

$$\gamma(]\alpha_0,\beta_0[) = \Gamma \cap (I_0 \times J_0)$$

et pour lequel

$$\gamma_x :]\alpha_0,\beta_0[\to I_0$$

est un changement de variable C_1. Pour conclure, il suffit alors de poser

$$f_0 = \gamma_y \circ \gamma_x^{-1}$$

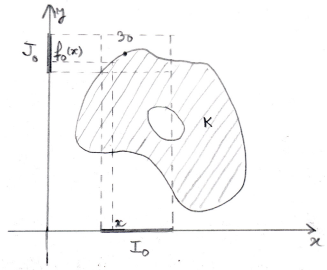
sur I_0. □

Lemme 1.9.6. *Soit K un compact régulier de $\mathbb{C}$ et soit z_0 un point de la frontière de K pour lequel il existe des intervalles ouverts $I_0 \ni x_0$ et $J_0 \ni y_0$ de $\mathbb{R}$ tels que*

$$\dot{K} \cap (I_0 \times J_0) = \{z \in \mathbb{C} : y = f_0(x)\}$$

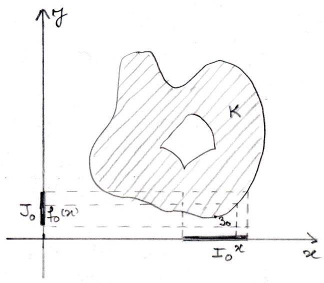
avec $f_0 : I_0 \to J_0$ fonction de classe C_1. Alors,

$$K^\circ \cap (I_0 \times J_0) = \{z \in I_0 \times J_0 : y < f_0(x)\}$$



ou

$$K^\circ \cap (I_0 \times J_0) = \{z \in I_0 \times J_0 : y > f_0(x)\}.$$



Démonstration. Posons

$$\Omega_< = \{z \in I_0 \times J_0 : y < f_0(x)\}$$

et

$$\Omega_> = \{z \in I_0 \times J_0 : y > f_0(x)\}.$$

Puisque $\Omega_<$ et $\Omega_>$ sont des ouverts connexes et que

$$\mathbb{C} = K^\circ \cup \dot{K} \cup \complement K,$$

il est clair que $\Omega_<$ (resp. $\Omega_>$) est inclus dans K° ou dans $\complement K$. Si $\Omega_<$ et $\Omega_>$ sont inclus dans K° alors $I_0 \times J_0 \subset \overline{\Omega_<} \cup \overline{\Omega_>} \subset K$ en contradiction avec le fait que $z_0 \notin K^\circ$. Si $\Omega_<$ et $\Omega_>$ sont inclus dans $\complement K$ alors $I_0 \times J_0 \subset \overline{\Omega_<} \cup \overline{\Omega_>} \subset \overline{\complement K} = \complement K^\circ$ en contradiction avec le fait que $z_0 \in K = \overline{K^\circ}$. Il s'ensuit que l'on a

$$\Omega_< \subset K^\circ \qquad \text{et} \qquad \Omega_> \subset \complement K$$

ou que l'on a

$$\Omega_< \subset \complement K \qquad \text{et} \qquad \Omega_> \subset K^\circ.$$

La conclusion en résulte. $\square$

Lemme 1.9.7. *Soit K un compact régulier de $\mathbb{C}$, soit Γ un arc de $\mathbb{C}$ inclus dans la frontière de K et soit $z_0 \in \Gamma \setminus \partial\Gamma$ un point en lequel la tangente à Γ n'est pas verticale. Supposons qu'il existe un voisinage V_0 de z_0 dans $\mathbb{C}$ tel que*

$$\dot{K} \cap V_0 = \Gamma \cap V_0.$$

Alors il existe des intervalles ouverts $I_0 \ni x_0$, $J_0 \ni y_0$ de $\mathbb{R}$ et une fonction $f_0 : I_0 \to J_0$ pour laquelle on a soit

$$K^\circ \cap (I_0 \times J_0) = \{z \in I_0 \times J_0 : y_0 < f_0(x)\},$$

$$\dot{K} \cap (I_0 \times J_0) = \{z \in I_0 \times J_0 : y_0 = f_0(x)\},$$
$$\complement K \cap (I_0 \times J_0) = \{z \in I_0 \times J_0 : y_0 > f_0(x)\},$$

soit des relations similaires avec les signes d'inégalités renversés. En particulier, il existe un et un seul vecteur normal unitaire ν_0 à Γ en z_0 tel que

$$z_0 + t\nu_0 \in K^\circ \qquad (\textit{resp. } z_0 + t\nu_0 \in \complement K)$$

pour tout $t > 0$ (resp. $t < 0$) suffisamment petit.

Démonstration. La première partie résulte directement des deux lemmes précédents. Pour obtenir la seconde partie, il suffit de remarquer que si ν_0 est un vecteur normal à Γ en z_0 alors

$$\nu_0 = \lambda(f_0'(x_0), -1)$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}_0$. On en tire alors que

$$\frac{\partial[f_0(x_0 + t\nu_{0x}) - y_0 - t\nu_{0y}]}{\partial t} = \lambda[f_0'(x_0)^2 + 1]$$

pour $t = 0$. Il s'ensuit que la fonction

$$t \mapsto f_0(x_0 + t\nu_{0x}) - y_0 - t\nu_{0y}$$

est strictement croissante (resp. décroissante) pour t voisin de 0 si $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$). La conclusion en découle alors aisément. □

Définition 1.9.8. On dit que le vecteur normal unitaire ν_0 dont il est question dans le lemme précédent *pointe vers l'intérieur de K*. On dit également qu'un vecteur tangent unitaire τ_0 à Γ en z_0 a le compact K *à sa gauche* si (τ_0, ν_0) est une base orientée de $\mathbb{C}$.

Proposition 1.9.9. *Soit K un compact régulier de $\mathbb{C}$ dont la frontière est une courbe C et soit $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_J$ un découpage en arcs de C. Orientons chaque Γ_j de sorte que le vecteur tangent unitaire associé ait K à sa gauche. Alors, pour tous p, q de classe C_1 sur un voisinage de K, on a*

$$\int_K \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy = \sum_{j=1}^{J} \int_{\Gamma_j} pdx + qdy.$$

Démonstration. Soient $z_1, \ldots, z_N$ les points de $\partial\Gamma_1 \cup \cdots \cup \partial\Gamma_J$. Considérons d'abord le cas où le support S de $pdx + qdy$ ne rencontre pas $\{z_1, \ldots, z_N\}$. Dans ce cas, pour tout point $z_0 \in S \cap K$ il existe des intervalles ouverts $I_0 \ni x_0$ et $J_0 \ni x_0$ pour lesquels un des cas de figure suivants se produit :

(a)

$$(I_0 \times J_0) \cap K = I_0 \times J_0,$$
$$(I_0 \times J_0) \cap C = \emptyset;$$

(b) il existe $f_0 : I_0 \to J_0$ de classe C_1 tel que

$$(I_0 \times J_0) \cap K = \{(x, y) \in I_0 \times J_0 : y \leq f_0(x)\},$$

$$(I_0 \times J_0) \cap C = (I_0 \times J_0) \cap \Gamma_{j_0} = \{(x, y) \in I_0 \times J_0 : y = f_0(x)\};$$

(c) il existe $f_0 : I_0 \to J_0$ de classe C_1 tel que

$$(I_0 \times J_0) \cap K = \{(x, y) \in I_0 \times J_0 : y \geq f_0(x)\},$$

$$(I_0 \times J_0) \cap C = \{(x, y) \in I_0 \times J_0 : y = f_0(x)\};$$

(d) il existe $f_0 : J_0 \to I_0$ de classe C_1 tel que

$$(I_0 \times J_0) \cap K = \{(x, y) \in I_0 \times J_0 : x \leq f_0(y)\},$$

$$(I_0 \times J_0) \cap C = \{(x, y) \in I_0 \times J_0 : x = f_0(y)\};$$

(e) il existe $f_0 : J_0 \to I_0$ de classe C_1 tel que

$$(I_0 \times J_0) \cap K = \{(x, y) \in I_0 \times J_0 : x \geq f_0(y)\},$$

$$(I_0 \times J_0) \cap C = \{(x, y) \in I_0 \times J_0 : x = f_0(y)\}.$$

En utilisant une partition finie de l'unité (voir Proposition 1.10.2), on peut donc se limiter à traiter le cas où S est inclus dans $I_0 \times J_0$ et où l'on est dans un des cas de figure ci-dessus. Il existe alors un intervalle compact $[a_0, b_0] \times [c_0, d_0]$ inclus dans $I_0 \times J_0$ et dont l'intérieur contient S.

Dans les cas (a), on a

$$\int_K \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy = \int_{[a_0,b_0]\times[c_0,d_0]} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

vu la Proposition 1.9.3, puisque S ne rencontre pas la frontière de $[a_0, b_0] \times [c_0, d_0]$.

Dans le cas (b), on a

$$\int_K \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy = \int_{K_0} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy$$

où $K_0 = \{(x,y) : a_0 \leq x \leq b_0, c_0 \leq y \leq f_0(x)\}$. Vu la Proposition 1.9.3, on en tire que

$$\begin{aligned}
\int_K \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy &= -\int_{a_0}^{b_0} [p(x, f_0(x)) + q(x, f_0(x))f_0'(x)] \, dx \\
&= \int_{\Gamma_{j_0}} pdx + qdy \\
&= \sum_{j=1}^{J} \int_{\Gamma_j} pdx + qdy.
\end{aligned}$$

Les cas (c), (d), (e) se traitent de manière similaire.

Considérons à présent le cas où S rencontre $\{z_1, \ldots, z_N\}$. Soit φ une fonction de classe C_1 sur $\mathbb{C}$ égale à 1 sur un voisinage de 0 et à support dans $D(0,1)$. Alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la fonction

$$\varphi_\varepsilon(z) = 1 - \sum_{n=1}^{N} \varphi((z - z_n)/\varepsilon)$$

a un support qui ne rencontre pas $\{z_1, \ldots, z_N\}$. Il résulte alors de ce qui précède que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} \int_{\Gamma_j} \varphi_\varepsilon pdx + \varphi_\varepsilon qdy &= \int_K \left[\frac{\partial(\varphi_\varepsilon q)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi_\varepsilon p)}{\partial y}\right] dxdy \\
&= \int_K \varphi_\varepsilon \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy + \int_K \left[\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x} q - \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial y} p\right] dxdy.
\end{aligned}$$

Comme φ_ε est borné sur K par une constante indépendante de ε et comme $\varphi_\varepsilon(z) \to 1$ pour tout $z \notin \{z_1, \ldots, z_N\}$, le théorème de Lebesgue montre que

$$\int_{\Gamma_j} \varphi_\varepsilon pdx + \varphi_\varepsilon qdy \to \int_{\Gamma_j} pdx + qdy$$

et que

$$\int_K \varphi_\varepsilon \left[\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right] dxdy \to \int_K \left[\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right] dxdy$$

si $\varepsilon \to 0$. Puisque

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x}((z - z_j)/\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial y} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \varphi}{\partial y}((z - z_j)/\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}$$

on voit aussi qu'il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de ε telle que

$$\left|\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x}\right| \leq \frac{C_1}{\varepsilon}, \qquad \left|\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial y}\right| \leq \frac{C_1}{\varepsilon}$$

sur K. Il s'ensuit qu'il existe une constante C_2 indépendante de ε telle que

$$\left|\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x}q - \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial y}p\right| \leq \frac{C_2}{\varepsilon}\chi_{D(z_1,\varepsilon)\cup,\ldots\cup D(z_N,\varepsilon)}$$

sur K. Ainsi,

$$\left|\int_K \left(\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x}q - \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial y}p\right)\, dxdy\right| \leq C_2 N\pi\varepsilon$$

et

$$\int_K \left(\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x}q - \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial y}p\right)\, dxdy \to 0$$

si $\varepsilon \to 0$. La conclusion en découle. $\square$

Corollaire 1.9.10. *Soit K un compact régulier de $\mathbb{C}$ dont la frontière est une courbe C de $\mathbb{C}$ et soit $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_J$ un découpage de C en arcs. Alors les arcs Γ_j orientés de sorte que le vecteur tangent ait K à sa gauche définissent une orientation de C. De plus, la courbe C est sans bord.*

Démonstration. Notons A_j et B_j l'origine et l'extrémité de l'arc orienté Γ_j. Montrons que si $z_0 \in \partial\Gamma_j \cap \partial\Gamma_k$ ($j \neq k$) alors on ne peut avoir à la fois $z = A_j$ et $z = A_k$ (resp. $z_0 = B_j$ et $z_0 = B_k$). Supposons par exemple que $z_0 = A_j$ et que $z_0 = A_k$. Comme $z_0 \notin \Gamma_l$ si l est distinct de j et de k, il est clair que z_0 possède un voisinage ouvert V tel que

$$V \cap C \subset \Gamma_j \setminus \{B_j\} \cup \Gamma_k \setminus \{B_k\}.$$

Soit φ une fonction de classe C_2 sur $\mathbb{C}$ égale à 1 sur un voisinage de z_0 et à support dans V. Vu la proposition précédente, on a alors

$$\int_{\Gamma_j} d\varphi + \int_{\Gamma_k} d\varphi = \sum_{l=1}^{J} \int_{\Gamma_l} d\varphi = 0.$$

Or

$$\int_{\Gamma_j} d\varphi = \varphi(B_j) - \varphi(A_j) \qquad \text{et} \qquad \int_{\Gamma_k} d\varphi = \varphi(B_k) - \varphi(A_k).$$

On en tire que

$$\varphi(B_j) - \varphi(A_j) + \varphi(B_k) - \varphi(A_k) = 0$$

d'où une contradiction puisque $\varphi(B_j) = \varphi(B_k) = 0$ et que $\varphi(A_j) = \varphi(A_k) = 1$.

Un raisonnement similaire montre que l'on ne peut avoir $z_0 = B_j$ et $z_0 = B_k$.

Montrons à présent que si $z_0 = A_j$ alors il existe $k \neq j$ tel que $z_0 \in \partial\Gamma_k$. Procédons par l'absurde. Si le résultat est faux, z_0 n'appartient à aucun $\partial\Gamma_k$ ($k \neq j$) et il existe un voisinage ouvert V de z_0 tel que

$$V \cap C \subset \Gamma_j \setminus \{B_j\}.$$

Soit φ une fonction de classe C_2 sur $\mathbb{C}$ égale à 1 sur un voisinage de z_0 et à support dans V. Vu la proposition précédente, on a

$$\int_{\Gamma_j} d\varphi = \sum_{l=1}^{J} \int_{\Gamma_l} d\varphi = 0.$$

Or,

$$\int_{\Gamma_j} d\varphi = \varphi(B_j) - \varphi(A_j) = -1$$

d'où une contradiction.

On montre de manière similaire que si $z_0 = B_j$ alors il existe $k \neq j$ tel que $z_0 \in \partial\Gamma_k$. □

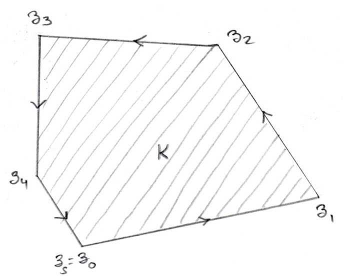
Définition 1.9.11. Un compact régulier K de $\mathbb{C}$ dont le bord est une courbe C est un *compact à bord curviligne* de $\mathbb{C}$. L'orientation de la courbe C considérée dans le corollaire ci-dessus est l'*orientation K à gauche*[3] de C. La courbe orientée obtenue en munissant C de cette orientation est le *bord orienté* de K. On le note ∂K.

Avec cette définition, on peut terminer cette section par un énoncé précis et assez général[4] de la formule de Green-Riemann.

Théorème 1.9.12 (Formule de Green-Riemann)**.** *Soit K un compact curviligne de $\mathbb{C}$ et soient p, q des fonctions de classe C_1 sur un voisinage de K. Alors*

$$\int_K \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial K} pdx + qdy.$$

Exemple 1.9.13. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ à bord curviligne dont le bord orienté est une courbe polygonale orientée $C : (z_0, z_1, \dots, z_J)$.



Alors,

$$\text{Aire } K = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} \int_{[z_{j-1},z_j]} xdy - ydx.$$

3. On dit aussi simplement « orientation aire gauche »lorsque K est clair par le contexte
4. Des énoncés plus généraux sont connus : voir e.g. [?]

Comme le segment orienté $[z_{j-1}, z_j]$ peut être paramétré par

$$t \mapsto z_{j-1} + t(z_j - z_{j-1}) \qquad (t \in [0,1]),$$

on a

$$\begin{aligned}
&\text{Aire } K \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^1 \left[[x_{j-1} + t(x_j - x_{j-1})]\,(y_j - y_{j-1}) - [y_{j-1} + t(y_j - y_{j-1})]\,(x_j - x_{j-1})\right]\,dt \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}[x_{j-1}(y_j - y_{j-1}) - y_{j-1}(x_j - x_{j-1})] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}[x_{j-1}y_j - y_{j-1}x_j] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\begin{vmatrix} x_{j-1} & x_j \\ y_{j-1} & y_j \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Pour terminer cette section, donnons une forme complexe de la formule de Green-Riemann qui nous sera utile dans la suite.

Proposition 1.9.14. *Soit K un compact de $\mathbb{C}$ bordé par la courbe orientée C et soient f et g des fonctions de classe C_1 sur un voisinage de K. Alors,*

$$\int_K \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)\,dxdy = \frac{i}{2}\int_C f\,dz + g\,d\overline{z}.$$

Démonstration. Vu la forme réelle de la formule de Green-Riemann, il est clair que

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\int_C f\,dz &= \frac{i}{2}\int_C f\,dx - \frac{1}{2}\int_C f\,dy \\
&= -\frac{i}{2}\int_K \frac{\partial f}{\partial y}\,dxdy - \frac{1}{2}\int_K \frac{\partial f}{\partial x}\,dxdy \\
&= -\int_K \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dxdy
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\int_C g\,d\overline{z} &= \frac{i}{2}\int_C g\,dx + \frac{1}{2}\int_C g\,dy \\
&= -\frac{i}{2}\int_K \frac{\partial g}{\partial y}\,dxdy + \frac{1}{2}\int_K \frac{\partial g}{\partial x}\,dxdy \\
&= \int_K \frac{\partial g}{\partial z}\,dxdy.
\end{aligned}$$

La conclusion en découle. □

1.10 Partitions finies de l'unité

Lemme 1.10.1. *Soit $\Omega_1, \dots, \Omega_J$ un recouvrement ouvert fini du compact K de $\mathbb{C}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$K \subset U_1 \cup \dots \cup U_J$$

où

$$U_j = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \complement\Omega_j) > \varepsilon, d(z, K) < 1\}.$$

Démonstration. Si le résultat est faux pour tout $m \geq 1$, il existe $z_m \in K$ tel que

$$d(z_m, \complement\Omega_j) \leq 1/m$$

pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$. Il existe alors une sous-suite $(z_{k_m})_{m\geq 1}$ de $(z_m)_{m\geq 1}$ qui converge vers $z_0 \in K$. Comme

$$d(z_0, \complement\Omega_j) = \lim_{m\longrightarrow\infty} d(z_{k_m}, \complement\Omega_j) = 0$$

pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$; on voit que

$$z_0 \in \bigcap_{j=1}^{J} \complement\Omega_j \subset \complement K$$

d'où une contradiction. □

Proposition 1.10.2. *Soit $\Omega_1, \dots, \Omega_J$ un recouvrement ouvert fini d'un compact K alors il existe des fonctions $\psi_1, \dots, \psi_J$ de classe C_∞ sur $\mathbb{C}$ à support compact telles que*

(i) $\operatorname{supp} \psi_j \subset \Omega_j$ *pour* $j \in \{1, \dots, J\}$ *;*

(ii) $\sum_{j=1}^{J} \psi_j = 1$ *sur un voisinage de* K*.*

Démonstration. Prenons les U_j comme dans le lemme précédent. Soit φ_0 une fonction de classe C_∞ égale à 0 sur un voisinage de K et à 1 sur un voisinage de $\complement(U_1 \cup \dots \cup U_J)$. Pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, soit φ_j une fonction de classe C_∞ à support compact égale à 1 sur un voisinage de $\overline{U_j}$ et à 0 sur un voisinage de $\complement\Omega_j$. Par construction,

$$\varphi = \sum_{j=0}^{J} \varphi_j > 0$$

sur $\mathbb{C} = \overline{U_1} \cup \dots \cup \overline{U_j} \cup \complement(U_1 \cup \dots \cup U_J)$. Posons

$$\psi_j = \varphi_j / \varphi.$$

Alors, $\operatorname{supp}\psi_0 \subset \complement K$, $\operatorname{supp}\psi_1 \subset \Omega_1$, ..., $\operatorname{supp}\psi_J \subset \Omega_J$ et

$$\sum_{j=0}^{J} \psi_j = 1$$

sur $\mathbb{C}$. Il s'ensuit que les fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_J$ sont à support compact et satisfont aux conditions (i) et (ii) de l'énoncé. $\square$

2 Fonctions Holomorphes

2.1 Définition et théorèmes de génération

Définition 2.1.1. Une *fonction holomorphe* sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est une fonction complexe de classe C_1 sur Ω qui vérifie l'équation de Cauchy-Riemann complexe

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

sur Ω.

Remarque 2.1.2. (a) Si $f = u + iv$ avec u, v réels, l'équation de Cauchy-Riemann complexe est équivalente au système de Cauchy-Riemann réel :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Exemples 2.1.3. Si on passe en revue les fonctions d'une variable complexe considérées dans le premier chapitre, on constate notamment que

(a) toute fonction polynomiale en z est holomorphe sur $\mathbb{C}$;

(b) toute fonction rationnelle en z est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé des pôles de la fonction ;

(c) la fonction exponentielle et les fonctions cosinus et sinus sont holomorphes sur $\mathbb{C}$;

(d) la fonction cotangente (resp. tangente) est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\pi)$ (resp. $\mathbb{C} \setminus (\pi/2 + \mathbb{Z}\pi)$) ;

(e) la fonction logarithme principal et la fonction puissance c principale ($c \in \mathbb{C}$) sont holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.

On constate aussi que les fonctions $\Re z$, $\Im z$, $\overline{z}$, $|z|$, $\arg(z)$ ne sont holomorphes sur aucun ouvert de $\mathbb{C}$. En fait, on a le résultat plus général suivant :

Proposition 2.1.4. *Si les fonctions f et $\overline{f}$ sont holomorphes sur l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ alors f est localement constant sur Ω. En particulier, toute fonction holomorphe à valeurs purement réelles (resp. imaginaires) sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ y est localement constante.*

Démonstration. Si f et $\overline{f}$ sont holomorphes sur Ω, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0, \qquad \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = 0.$$

On en tire que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

et par conséquent que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

La conclusion en découle. □

Proposition 2.1.5. *Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Alors f est holomorphe sur Ω si et seulement si*

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ \neq}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

existe et est fini pour tout $z_0 \in \Omega$ et si la fonction $z_0 \mapsto f'(z_0)$ est continue[5] *sur Ω.*

Démonstration. (a) Supposons que f est de classe C_1 sur Ω. Alors, la Proposition 1.3.2 montre que l'on a

$$f(z_0+h) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)h + o(h)$$

si $h \to 0$ pour tout $z_0 \in \Omega$. Il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ \neq}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$$

quelque soit $z_0 \in \Omega$. La fonction f' coïncide donc avec $\partial f / \partial z$ sur Ω et y est par conséquent continue.

(b) Supposons maintenant que la fonction f' soit définie et continue sur Ω. Alors, pour tout $z_0 \in \Omega$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0+ih) - f(z_0)}{h} = if'(z_0).$$

5. Nous verrons plus tard que cette condition de continuité est en fait inutile.

On en tire que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0),$$

et que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

La conclusion en découle. □

Définition 2.1.6. La fonction f' considérée dans la proposition précédente est la *dérivée complexe* de f.

Remarque 2.1.7. Il résulte de la preuve de la proposition précédente que l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f', \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = if', \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = f', \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

pour toute fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. En particulier, la dérivée complexe de f détermine toutes les autres dérivées premières de f.

Pour obtenir l'holomorphie d'une expression à partir de celle des fonctions qui y interviennent, on dispose des théorèmes de génération ci-dessous.

Proposition 2.1.8. *Si f et g sont des fonctions holomorphes sur Ω, alors*

(a) *$f + g$ est holomorphe sur Ω ;*

(b) *fg est holomorphe sur Ω ;*

(c) *f/g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z : g(z) = 0\}$.*

Démonstration. Cela découle immédiatement de la Proposition 1.3.5. □

Proposition 2.1.9. *Si f est holomorphe sur Ω et si g est holomorphe sur U, alors $g \circ f$ est holomorphe sur l'ouvert $\{z \in \Omega : f(z) \in U\}$ et*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

sur cet ouvert.

Démonstration. Cela résulte directement de la Proposition 1.3.8. □

2.2 Formule de représentation de Cauchy

Tirons d'abord une conséquence directe de la formule de Green-Riemann et de la définition des fonctions holomorphes.

Proposition 2.2.1 (Théorème de Cauchy)**.** *Si f est holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et si K est un compact de Ω bordé par la courbe orientée C, alors*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Démonstration. Vu la Proposition 1.9.14, on sait que dans les conditions de l'énoncé on a

$$\int_C f(z)\,dz = 2i \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,dx\,dy.$$

La conclusion est alors immédiate puisque l'holomorphie de f entraîne que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

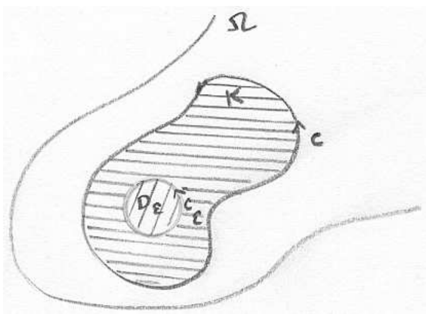
□

Grâce à ce résultat, nous sommes maintenant en mesure d'établir une des plus importantes formules de la théorie des fonctions holomorphes.

Proposition 2.2.2 (Formule de représentation de Cauchy)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit f une fonction holomorphe sur Ω et soit K un compact de Ω bordé par la courbe orientée C. Alors, pour tout $z_0 \in K^\circ$, on a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Démonstration. Notons C_ε (resp. D_ε) le cercle (resp. le disque ouvert) de centre z_0 et de rayon ε et choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\overline{D_\varepsilon} \subset K^\circ$.



Dans ce cas, on vérifie aisément que $K \setminus D_\varepsilon$ est bordé par $C \cup C_\varepsilon^-$. La fonction f étant holomorphe sur Ω,

$$\frac{f(z)}{z - z_0}$$

est holomorphe au voisinage de $K \setminus D_\varepsilon$ et le théorème de Cauchy montre que

$$\int_{C \cup C_\varepsilon^-} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0.$$

Il en résulte que

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

La deuxième intégrale est donc en fait indépendante de ε. Or,

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})\varepsilon i e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}}\, d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta.$$

Comme f est continu en z_0, on a

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0)\, d\theta = 2i\pi f(z_0).$$

Il s'ensuit que

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2i\pi f(z_0).$$

□

Remarque 2.2.3. Dans les conditions de la proposition précédente, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0$$

si $z_0 \in \Omega \setminus K$. En effet, dans ce cas, la fonction

$$\frac{f(z)}{z - z_0}$$

est holomorphe au voisinage de K.

Corollaire 2.2.4. *Dans les conditions de la proposition précédente, f est de classe C_∞ sur Ω et pour tout $z_0 \in K^\circ$, on a*

$$\frac{\partial^p f}{\partial z^p}(z_0) = \frac{p!}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{p+1}}\, dz \qquad (p \geq 0).$$

En particulier, les fonctions

$$\frac{\partial^p f}{\partial z^p}$$

sont holomorphes sur Ω.

Démonstration. Par la formule de représentation de Cauchy, on sait que

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

pour tout $z_0 \in K^\circ$. Pour tout z fixé dans C, la fonction

$$z_0 \mapsto \frac{f(z)}{z - z_0}$$

est de classe C_∞ sur K° et on montre aisément que le théorème de dérivation des intégrales paramétriques s'applique. On en tire que

$$z_0 \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

est de classe C_∞ sur K° et que

$$\frac{\partial^p}{\partial z_0^p} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \right] = \frac{p!}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{p+1}}\, dz.$$

Il s'ensuit que $f(z_0)$ est de classe C_∞ sur K° et que l'on a

$$\frac{\partial^p f(z_0)}{\partial z_0^p} = \frac{p!}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{p+1}}\, dz$$

sur cet ouvert. Comme on peut prendre pour K n'importe quel disque fermé de Ω, on voit que f est en fait de classe C_∞ sur Ω. En particulier, sur cet ouvert on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial^p f}{\partial z^p} \right) = \frac{\partial^p}{\partial z^p} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = 0$$

et

$$\frac{\partial^p f}{\partial z^p}$$

est holomorphe sur Ω. □

2.3 Inégalités de Cauchy

Une conséquence importante du corollaire précédent est que le module d'une dérivée d'une fonction holomorphe peut être contrôlé à partir du module de la fonction elle-même. Plus précisément, on a :

Proposition 2.3.1 (Inégalités de Cauchy)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit f une fonction holomorphe sur Ω et soit K un compact de Ω bordé par la courbe orientée C. Alors, pour tout $z_0 \in K^\circ$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left| f^{(p)}(z_0) \right| \leq \frac{p! L_C}{2\pi d(z_0, C)^{p+1}} \sup_{z \in C} |f(z)|.$$

Démonstration. Cela résulte directement de la formule de représentation de Cauchy pour les dérivées de f par majoration de l'intégrale curviligne qui y figure. □

Corollaire 2.3.2 (Théorème de Liouville)**.** *Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et s'il existe $R > 0$ et $C > 0$ tels que*

$$|f(z)| \leq C|z|^p \quad (p \in \mathbb{N})$$

pour $|z| > R$, alors $f(z)$ est un polynôme en z de degré inférieur ou égal à p.

Démonstration. Le résultat précédent pour $\Omega = \mathbb{C}$, $K = D_r$ (disque de centre 0 et de rayon $r > R$) montre que

$$|f^{(q)}(z_0)| \leq \frac{q!2\pi r}{2\pi(r - |z_0|)^{q+1}} C r^p$$

si $|z_0| < r$. Il s'ensuit que

$$|f^{(q)}(z_0)| \leq \frac{q!Cr^{p+1}}{(r - |z_0|)^{q+1}}$$

pour tout $r > |z_0|$. Si $q > p$, on trouve, en faisant tendre r vers l'infini, que

$$|f^{(q)}(z_0)| = 0.$$

La conclusion en découle aisément. □

Exemple 2.3.3. A titre d'application du théorème précédent, montrons que tout polynôme en z de degré ≥ 1 possède au moins un zéro complexe. Soit $P(z)$ un tel polynôme. Supposons que $P(z)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Alors

$$\frac{1}{P(z)}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et comme on a

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} \frac{1}{P(z)} = 0,$$

la fonction $1/P(z)$ est bornée sur $\mathbb{C}$. Cette fonction est donc constante sur $\mathbb{C}$. Ainsi, $P(z)$ est également constant sur $\mathbb{C}$ et cela contredit nos hypothèses.

2.4 Suites et séries de fonctions holomorphes

Les inégalités de Cauchy ont des conséquences intéressantes en ce qui concerne la convergence dans l'espace des fonctions holomorphes.

Proposition 2.4.1 (Théorème de Weierstrass)**.** *Soit f_m une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Supposons que f_m converge vers f uniformément sur tout compact de Ω. Alors,*

(a) f est holomorphe sur Ω ;

(b) $f_m^{(p)}$ converge uniformément vers $f^{(p)}$ sur tout compact de Ω.

Démonstration. Soit K un compact de Ω et soit $\varepsilon < d(K, \complement\Omega)$. Par construction, le disque fermé $\overline{D(z_0,\varepsilon)}$ est inclus dans Ω quelque soit $z_0 \in K$. Pour $z_0 \in K$, les inégalités de Cauchy montrent alors que

$$\left|f_m^{(p)}(z_0) - f_n^{(p)}(z_0)\right| \leq \frac{p!}{\varepsilon^p} \sup_{z\in C(z_0,\varepsilon)} |f_m(z) - f_n(z)|$$

où $C(z_0, \varepsilon)$ est le cercle bordant $\overline{D(z_0,\varepsilon)}$. On en tire que

$$\sup_{z_0\in K} \left|f_m^{(p)}(z_0) - f_n^{(p)}(z_0)\right| \leq \frac{p!}{\varepsilon^p} \sup_{K_\varepsilon} |f_m(z) - f_n(z)| .$$

si

$$K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) \leq \varepsilon\}.$$

Soient r et s deux naturels. Comme

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r}\frac{\partial^s}{\partial y^s} f_n = i^s f_n^{(r+s)},$$

il résulte de ce qui précède que la suite

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r}\frac{\partial^s}{\partial y^s} f_n$$

est uniformément de Cauchy sur K. Cette suite converge donc uniformément sur K et on peut par conséquent lui appliquer le théorème de dérivation des limites. Ce théorème permet alors d'affirmer que f est de classe C_∞ sur Ω et que

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r}\frac{\partial^s}{\partial y^s} f_n \to \frac{\partial^r}{\partial x^r}\frac{\partial^s}{\partial y^s} f$$

uniformément sur tout compact de Ω. En particulier,

$$\frac{\partial f_n}{\partial \overline{z}} \to \frac{\partial f}{\partial \overline{z}},$$

et
$$f_n^{(p)}(z) = \frac{\partial^p f_n}{\partial z^p} \to \frac{\partial^p f}{\partial z^p} = f^{(p)}(z)$$
uniformément sur tout compact de Ω. L'holomorphie de f_m sur Ω permet alors de conclure. $\square$

Comme une série n'est que la suite de ses sommes partielles, on a aussi le résultat suivant.

Corollaire 2.4.2. *Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. Supposons que la série*
$$\sum_{m=0}^{+\infty} f_m$$
converge uniformément sur tout compact de Ω. Alors,

(a) la somme
$$f = \sum_{m=0}^{+\infty} f_m$$
de cette série est holomorphe sur Ω ;

(b) on a
$$f^{(p)} = \sum_{m=0}^{+\infty} f_m^{(p)}$$
uniformément sur tout compact de Ω.

Pour utiliser le résultat précédent en pratique, il faut être à même de tester rapidement si une série est uniformément convergente sur tous les compacts d'un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour cela, on peut faire usage de la proposition suivante.

Proposition 2.4.3. *Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions complexes définies sur une partie A de $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe une série numérique réelle convergente*
$$\sum_{m=0}^{+\infty} C_m$$
telle que
$$|f_m(z)| \leq C_m$$
pour tout $z \in A$ et tout $m \in \mathbb{N}$. Alors la série
$$\sum_{m=0}^{+\infty} f_m$$
converge uniformément sur A.

Démonstration. Il suffit de remarquer que, dans les conditions de l'énoncé, on a

$$\sup_A |\sum_{m=p}^{q} f_m| \leq \sum_{m=p}^{q} C_m$$

et de conclure en utilisant le critère de Cauchy pour la convergence des séries numériques réelles et le critère de Cauchy pour la convergence uniforme des séries de fonctions complexes sur A. □

Définition 2.4.4. Dans les conditions de la proposition précédente, on dit que la série de fonctions complexes

$$\sum_{m=0}^{+\infty} f_m$$

converge normalement sur A.

2.5 Séries de puissances naturelles

Définition 2.5.1. Une *série de puissances naturelles de* $(z - z_0)$ est une série du type

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(z - z_0)^m$$

dont les coefficients $a_m \in \mathbb{C}$.

Remarque 2.5.2. Dans la suite, il sera commode de prolonger la relation d'ordre habituelle de $\mathbb{R}$ à $[-\infty, +\infty]$ en posant

$$-\infty < r < +\infty$$

si $r \in \mathbb{R}$.

On conviendra également d'appeler disque ouvert de centre z_0 et de rayon $r \in [0, +\infty]$ l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

même si cet ensemble est vide pour $r = 0$ ou est égal au plan complexe tout entier si $r = +\infty$.

De même on conviendra d'appeler disque fermé de centre z_0 et de rayon $r \in [0, +\infty]$ l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

même si cet ensemble est réduit à un point pour $r = 0$ ou est égal au plan complexe tout entier pour $r = +\infty$.

Proposition 2.5.3 (Abel)**.** *Si R est la borne supérieure dans $[0, +\infty]$ des $r \geq 0$ pour lesquels la suite*
$$|a_n| r^n$$
est bornée, alors la série de puissances naturelles
$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$$
converge normalement sur tout compact du disque ouvert
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$
et diverge hors du disque fermé
$$F = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$$

Démonstration. Soit K un compact inclus dans Ω. Alors
$$r_K = \sup_{z \in K} |z - z_0| < R$$
et il existe un $r \in]r_K, R[$. Pour un tel r,
$$C = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n$$
est fini. Il s'ensuit que
$$\sup_{z \in K} |a_n (z - z_0)^n| \leq C \left(\frac{r_K}{r}\right)^n .$$
La série géométrique
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_K}{r}\right)^n$$
étant de raison strictement inférieure à 1, on en tire que la série de puissances naturelles étudiée converge normalement sur K.

Soit à présent z un point qui n'appartient pas à F. Si la série de puissances naturelles considérée converge en z, son terme général tend vers 0. Il s'ensuit qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que
$$|a_m (z - z_0)^m| \leq C$$
pour tout $m \geq 0$. Vu la définition de R, on en tire que
$$|z - z_0| \leq R$$
en contradiction avec le fait que $z \notin F$. □

Remarque 2.5.4.

(a) Le nombre R considéré dans la proposition précédente peut prendre toutes les valeurs de 0 à $+\infty$ inclus comme on s'en assure en considérant les séries :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m!(z-z_0)^m, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} R^{-m}(z-z_0)^m \quad (0 < R < +\infty), \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!}(z-z_0)^m.$$

(b) Dans la situation de la proposition précédente, le comportement de

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(z-z_0)^m$$

pour $|z| = R$ est très variable comme on le voit en considérant les trois exemples

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(z-z_0)^m, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(z-z_0)^m, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(z-z_0)^m}.$$

Dans chaque cas, le rayon de convergence est égal à 1. Cependant, la première série diverge si $|z-z_0| = 1$, la seconde est semi-convergente si $|z-z_0| = 1$ et $z - z_0 \neq 1$ et diverge si $z - z_0 = 1$ alors que la troisième est normalement convergente sur tout le disque fermé $\{z : |z-z_0| \leq 1\}$.

Définition 2.5.5. Le *rayon de convergence* de la série de puissances naturelles

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(z-z_0)^m.$$

est le nombre R considéré dans la proposition précédente. Le *disque ouvert de convergence* de la série considérée quant à lui l'ouvert Ω correspondant.

On peut souvent calculer rapidement le rayon de convergence d'une série de puissances naturelles au moyen du résultat suivant :

Proposition 2.5.6. *Considérons la série de puissances naturelles*

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(z-z_0)^m$$

et notons R son rayon de convergence. Supposons que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

(a) *la suite $\sqrt[m]{|a_m|}$ admet une limite L finie ou infinie ;*

(b) il existe $M > 0$ tel que $|a_m| > 0$ pour $m \geq M$ et la suite

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|$$

définie pour $m \geq M$ admet une limite L finie ou infinie.

Alors,

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{si } L = 0 \\ 1/L & \text{si } L \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } L = +\infty \end{cases}$$

Démonstration. Cela découle du critère de la racine et du critère du quotient. □

Remarque 2.5.7. On peut montrer plus généralement que si on pose

$$L = \limsup_{m \longrightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|} := \inf_{M \geq 0} \sup_{m \geq M} \sqrt[m]{|a_m|}$$

alors R peut se calculer à partir de L comme dans la proposition ci-dessus.

Proposition 2.5.8. *Soit R le rayon de convergence de la série de puissances naturelles*

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m (z - z_0)^m.$$

Alors, la somme $f(z)$ de cette série est holomorphe sur le disque ouvert de centre z_0 et de rayon R et on a

$$f^{(p)}(z) = \sum_{m=p}^{+\infty} a_m \frac{m!}{(m-p)!} (z - z_0)^{m-p}$$

uniformément sur tout compact de ce disque pour tout $p \geq 0$. En particulier, on a

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$$

pour tout $m \geq 0$.

Démonstration. Cela découle directement de la Proposition 2.5.3 compte tenu du Corollaire 2.4.2. □

2.6 Développements en séries de Taylor

Définition 2.6.1. Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors la *série de Taylor de f en z_0* est la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m.$$

Dans la cas particulier où $z_0 = 0$, la série de Taylor de f en z_0 est appelée *série de MacLaurin* de f.

Le dernier résultat de la section précédente montre en particulier que si la fonction holomorphe f est développable en série de puissances naturelles de $(z - z_0)$ sur un disque ouvert de centre z_0, alors cette série est la série de Taylor de f en z_0. Nous allons à présent compléter ce résultat en montrant que toute fonction holomorphe sur un disque ouvert de centre z_0 est développable en série de de puissances naturelles de $(z - z_0)$ sur ce disque.

Proposition 2.6.2. *Soit f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(z_0, R)$ de $\mathbb{C}$. Alors, sur ce disque, on a*

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m.$$

En particulier, le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_0 est au moins R.

Démonstration. Soit $r < R$. On a $\overline{D(z_0, r)} \subset D(z_0, R)$. Notons C le cercle bordant $\overline{D(z_0, r)}$. Vu la formule de représentation de Cauchy, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

pour tout $z \in D(z_0, r)$. On en tire que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z}\, d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\, d\zeta$$

sur $D(z_0, r)$. Fixons z tel que $|z - z_0| < r$. Comme

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

pour tout $\zeta \in C$, la série de fonctions

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^m$$

converge normalement en ζ sur C vers

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}}.$$

On en tire que

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^m} \, d\zeta \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \, d\zeta \right] (z - z_0)^m. \end{aligned}$$

Vu la formule de représentation de Cauchy pour les dérivées de f en z_0, l'intégrale entre crochets vaut $f^{(m)}(z_0)/m!$. Il s'ensuit que

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m$$

sur $D(z_0, r)$. Comme r peut être choisi arbitrairement proche de R, cette formule est en fait valable sur $D(z_0, R)$; d'où la conclusion. $\square$

Remarque 2.6.3. Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et si z_0 est un point de Ω, il résulte de ce qui précède que f est la somme de sa série de Taylor en z_0 sur le disque ouvert de centre z_0 et de rayon $R = d(z_0, \complement\Omega)$. Il s'ensuit que la rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_0 est au moins égal à R. On prendra cependant garde au fait que ce rayon peut être strictement plus grand que R et que f peut différer de la somme de sa série de Taylor hors de $D(z_0, R)$ (voir e. g. (d) ci-dessous).

Exemples 2.6.4.

(a) Si $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ est une fonction polynomiale, alors la formule de Taylor redonne le résultat bien connu :

$$P(z) = \sum_{m=0}^{n} P^{(m)}(z_0)(z - z_0)^m.$$

(b) Comme l'exponentielle est sa propre dérivée, il est clair que la série de Taylor de e^z en $z_0 \in \mathbb{C}$ est la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{e^{z_0}}{m!}(z-z_0)^m$$

et que cette série représente e^z sur $\mathbb{C}$ tout entier. On retrouve ainsi à la fois que

$$e^z = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}$$

sur $\mathbb{C}$ et que

$$e^z = e^{z_0} e^{z-z_0}$$

pour tous les nombres complexes z et z_0.

(c) Puisque

$$\cos'(z) = -\sin(z) \quad \text{et que} \quad \sin'(z) = -\cos(z),$$

on voit que

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(z_0)}{(2n)!}(z-z_0)^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(z_0)}{(2n+1)!}(z-z_0)^{2n+1}$$

et que

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(z_0)}{(2n)!}(z-z_0)^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(z_0)}{(2n+1)!}(z-z_0)^{2n+1}$$

sur $\mathbb{C}$. En particulier, on retrouve que

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

sur $\mathbb{C}$ et que l'on a

$$\cos(z) = \cos(z_0)\cos(z-z_0) - \sin(z_0)\sin(z-z_0)$$

et

$$\sin(z) = \sin(z_0)\cos(z-z_0) + \cos(z_0)\sin(z-z_0)$$

pour tous les nombres complexes z et z_0.

(d) On sait que $\ln(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ et que

$$\ln'(z) = \frac{1}{z}$$

sur cet ouvert. Il s'ensuit que la série de Taylor de $\ln(z)$ en $z_0 = (x_0, y_0) \notin]-\infty, 0]$ est la série

$$\ln(z_0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m\, z_0^m}(z - z_0)^m$$

et que cette série représente $\ln(z)$ si $|z - z_0| < |y_0|$ lorsque $x_0 < 0$ et si $|z - z_0| < |z_0|$ lorsque $x_0 \geq 0$.

Lorsque $z_0 = 1$, on déduit de ce qui précède que la série de Mercator

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{z^m}{m}$$

converge vers $\ln(1 + z)$ si $|z| < 1$.

On remarquera que la série de Taylor de $\ln(z)$ en z_0 a toujours un rayon de convergence égal à $|z_0|$. Lorsque $x_0 < 0$, cette série de Taylor converge donc vers une fonction holomorphe $\ell(z)$ sur $D(z_0, |z_0|)$ mais on n'est assuré d'avoir $\ell(z) = \ln(z)$ que sur $D(z_0, |y_0|)$. En fait, sur $D(z_0, |z_0|)$, on peut montrer que

$$\ell(z) = \begin{cases} \ln(z) & \text{si } \Im z \geq 0 \\ \ln(z) + 2i\pi & \text{si } \Im z < 0. \end{cases}$$

(e) Soit $c \in \mathbb{C}$. Comme la fonction z^c est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ et de dérivée égale à cz^{c-1} sur cet ouvert, on voit aisément que

$$z^c = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{c(c-1)\dots(c-m+1)}{m!} z_0^{c-m}(z - z_0)^m$$

dans les mêmes conditions que pour (d). On ne manquera de remarquer que cette formule est une généralisation de la formule du binôme de Newton au cas des exposants complexes. Comme pour (d), on en tire que

$$(1 + z)^c = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{c(c-1)\dots(c-m+1)}{m!} z^m$$

si $|z| < 1$.

En pratique il est parfois plus simple de calculer le développement de Taylor d'une expression algébrique à partir des développements de Taylor des fonctions qui y interviennent plutôt que d'essayer de calculer directement toutes les dérivées de l'expression. On dispose pour cela du résultat suivant :

Proposition 2.6.5. *Supposons que les séries de puissances naturelles*

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(z-z_0)^m \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} b_m(z-z_0)^m$$

convergent respectivement vers $f(z)$ et $g(z)$ sur $D(z_0, R)$. Alors,

(a) on a

$$f(z) + g(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m(z-z_0)^m$$

sur $D(z_0, R)$ si $c_m = a_m + b_m$, $(m \geq 0)$;

(b) on a

$$f(z)g(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m(z-z_0)^m$$

sur $D(z_0, R)$ si

$$c_m = \sum_{n=0}^{m} a_n b_{m-n} \qquad (m \geq 0).$$

Si de plus $g(z)$ ne s'annule pas sur $D(z_0, R)$ alors

(c) on a

$$f(z)/g(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m(z-z_0)^m$$

sur $D(z_0, R)$ si c_m est l'unique solution du système triangulaire

$$\sum_{n=0}^{m} c_n b_{m-n} = a_m \qquad (m \geq 0).$$

Démonstration. Le point (a) est évident. Le point (b) résulte de la formule de Leibnitz

$$(fg)^{(m)} = \sum_{n=0}^{m} \mathrm{C}_m^n\, f^{(n)} g^{(m-n)}.$$

Quant au point (c), il découle de (b) puisque si $h(z) = f(z)/g(z)$ on a

$$f(z) = h(z)g(z).$$

$\square$

Exemples 2.6.6. (a) Considérons la fonction $\Phi(z)$ définie en posant

$$\Phi(z) = \begin{cases} z/(e^z - 1) & \text{si } z \notin 2i\pi\mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Comme $e^z - 1$ s'annule si et seulement si $z = 2ik\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et que

$$e^z - 1 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}$$

il est clair que $\Phi(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}_0$. La fonction $\Phi(z)$ est donc développable en série de MacLaurin sur $D(0, 2\pi)$. Notons c_m les coefficients de ce développement. Comme

$$z = \Phi(z)(e^z - 1),$$

ce qui précède montre que

$$\sum_{n=0}^{m-1} c_n \frac{1}{(m-n)!} = \delta_{m1} \qquad (m \geq 1).$$

Il s'ensuit que les c_n sont déterminés par les relations

$$\sum_{n=0}^{m} c_n \frac{1}{(m+1-n)!} = \delta_{m0} \qquad (m \geq 0).$$

On en tire que

$$\sum_{n=0}^{m} \mathrm{C}_{m+1}^{n} (n! c_n) = \delta_{m0} \qquad (m \geq 0)$$

et cela montre que

$$n! c_n$$

est le nombre de Bernoulli B_n. En particulier, on a

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{B_m}{m!} z^m = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n^*}{(2n)!} z^{2n}$$

sur $D(0, 2\pi)$.

(b) Un calcul rapide montre que

$$z \operatorname{tg} z = \Phi(2iz) - \Phi(4iz) - iz$$

si $z \in \mathbb{C} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$. Il s'ensuit que

$$z\,\mathrm{tg}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}[(2i)^{2n} - (4i)^{2n}]z^{2n}$$

si $|z| < \pi/2$. On en tire que

$$\mathrm{tg}\, z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n}(1 - 2^{2n})z^{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_n^*}{(2n)!} z^{2n-1}$$

sur $D(0, \pi/2)$.

Remarque 2.6.7. Plaçons nous dans les condition de la Proposition précédente et supposons que nous ne nous intéressions qu'aux c_m avec $m \leq M$. Dans ce cas, on peut disposer les calculs comme suit :

(a) On procède comme pour l'addition des polynômes mais en ne gardant que les termes d'indice $\leq M$. On forme donc le tableau :

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0 & + & a_1 z & + & \cdots & + & a_M z^M \\
b_0 & + & b_1 z & + & \cdots & + & b_M z^M \\
\hline
(a_0 + b_0) & + & (a_1 + b_1)z & + & \cdots & + & (a_M + b_M)z^M
\end{array}$$

et on lit les c_m cherchés sur la dernière ligne.

(b) On procède comme pour la multiplication des polynômes mais en ne gardant que les termes d'indice $\leq M$. On forme donc le tableau :

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0 & + & a_1 z & + & \cdots & + & a_M z^M \\
b_0 & + & b_1 z & + & \cdots & + & b_M z^M \\
\hline
(a_0 b_0) & + & (a_1 b_0)z & + & \cdots & + & (a_M b_0)z^M \\
 & + & (a_0 b_1)z & + & \cdots & + & (a_{M-1} b_1)z^M \\
 & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & (a_0 b_M)z^M \\
\hline
(a_0 b_0) & + & (a_1 b_0 + a_0 b_1)z & + & \cdots & + & (a_M b_0 + \cdots + a_0 b_M)z^M
\end{array}$$

et on lit les c_m cherchés sur la dernière ligne.

(c) On procède comme pour la division des polynômes mais en ne gardant que les termes d'indice $\leq M$ et en procédant dans l'ordre des puissances croissantes. On forme donc le tableau :

$$
\begin{array}{ccccccc|cccccc}
a_0 & + & a_1 z & + & \cdots & + & a_M z^M & b_0 & + & b_1 z & + & \cdots & b_M z^M \\
\cline{8-13}
c_0 b_0 & + & c_0 b_1 z & + & \cdots & + & c_0 b_M z^M & c_0 & + & c_1 z & + & \cdots & c_M z^M \\
\cline{1-7}
 & & (a_1 - c_0 b_1) z & + & \cdots & + & (a_M - c_0 b_M) z^M & & & & & & \\
 & & (c_1 b_0) z & + & \cdots & + & (c_1 b_{M-1}) z^M & & & & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & & (c_M b_0) z^M & & & & & & \\
\cline{7-7}
 & & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

et on en tire les c_m cherchés.

Exemples 2.6.8. (a) Cherchons les termes d'indice ≤ 4 du développement de MacLaurin de $\sin(z)\ln(1+z)$. On a

$$
\sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^4)
$$

et

$$
\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + o(z^4)
$$

On forme alors le tableau :

$$
\begin{array}{ccccccc}
z & & & - & \frac{z^3}{6} & & \\
z & - & \frac{z^2}{2} & + & \frac{z^3}{3} & - & \frac{z^4}{4} \\
\hline
 & & z^2 & & & - & \frac{z^4}{6} \\
 & & & - & \frac{z^3}{2} & & \\
 & & & & & & \frac{z^4}{3} \\
\hline
 & & z^2 & - & \frac{z^3}{2} & + & \frac{z^4}{6}
\end{array}
$$

et on en tire que

$$
\sin(z)\ln(1+z) = z^2 - \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{6} + o(z^4)
$$

(b) Cherchons les termes d'indice ≤ 4 du développement de MacLaurin de $1/\cos z$. On a

$$
\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + o(z^4)
$$

On forme alors le tableau :

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & & & & & 1 & - & \frac{z^2}{2} & + & \frac{z^4}{24} \\ \cline{6-10}
1 & - & \frac{z^2}{2} & + & \frac{z^4}{24} & 1 & + & \frac{z^2}{2} & + & \frac{5z^4}{24} \\ \cline{1-5}
 & & \frac{z^2}{2} & - & \frac{z^4}{24} & & & & & \\
 & & \frac{z^2}{2} & - & \frac{z^4}{4} & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & \frac{5z^4}{24} & & & & &
\end{array}
$$

et on en tire que

$$\frac{1}{\cos z} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5z^4}{24} + o(z^4)$$

Signalons pour terminer cette section que l'on peut aussi obtenir aisément la série de Taylor d'une dérivée ou d'une primitive d'une fonction holomorphe en un point à partir de la série de Taylor de la fonction en ce point. Plus précisément :

Proposition 2.6.9. *Supposons que la série*

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$$

convergent vers $f(z)$ sur $D(z_0, R)$. Alors,

(a) la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) a_{m+1} (z - z_0)^m$$

converge vers la dérivée de $f(z)$ sur $D(z_0, R)$;

(b) la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_{m-1}}{m} (z - z_0)^m$$

converge vers la seule primitive holomorphe de $f(z)$ sur $D(z_0, R)$ qui s'annule en z_0 ;

Démonstration. Tout découle directement de la Proposition 2.5.8. □

Exemples 2.6.10.

(a) Soit $R(z)$ une fonction rationnelle dont les pôles se trouvent en $z_1, \dots, z_q$ et soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_q\}$. Pour obtenir le développement $R(z)$ en série de Taylor en z_0, on peut procéder comme suit. On voit d'abord par décomposition en fractions simples que l'on peut se ramener au cas où $R(z)$ est de la forme

$$\frac{1}{(z-z_j)^\nu} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial z^{\nu-1}} \left(\frac{1}{z-z_j} \right).$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-z_j} &= \frac{1}{z-z_0+z_0-z_j} = \frac{1}{z_0-z_j} \frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{z_j-z_0}} \\ &= -\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^m}{(z_j-z_0)^{m+1}} \end{aligned}$$

si $|z-z_0| < |z_j-z_0|$ Dans ce cas, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial z^{\nu-1}} \left(\frac{1}{z-z_j} \right) &= -\sum_{m=\nu-1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-\nu+2)}{(z_j-z_0)^{m+1}} (z-z_0)^{m-\nu+1} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+\nu-1)(n+\nu-2)\cdots(n+1)}{(z_j-z_0)^{n+\nu}} (z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{(z-z_j)^\nu} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\nu \, \mathrm{C}_{n+\nu-1}^{\nu-1}}{(z_j-z_0)^{n+\nu}} (z-z_0)^n.$$

si $|z-z_0| < |z_j-z_0|$.

(b) Cherchons à présent le développement de MacLaurin de $\arcsin z$. Remarquons tout d'abord que, si $|z| < 1$, on a

$$\begin{aligned} \arcsin' z &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = (1-z^2)^{-1/2} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!} (-z^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2n-1}{2}}{n!} (-1)^n z^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} z^{2n} \end{aligned}$$

vu la formule du binôme de Newton pour les exposants complexes. Comme $\arcsin 0 = 0$, on a donc aussi

$$\arcsin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}$$

lorsque $|z| < 1$.

(g) On peut procéder de la même manière pour obtenir le développement de MacLaurin de $\operatorname{arctg} z$. En effet, on a

$$\operatorname{arctg}' z = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$$

si $|z| < 1$ et comme $\operatorname{arctg} 0 = 0$ on en tire que

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

2.7 Zéros des fonctions holomorphes

Définition 2.7.1. Soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$ un zéro de f. Deux cas de figure peuvent alors se présenter :

(a) Il existe $p \geq 1$ tel que

$$f(z_0) = 0, \ldots, f^{p-1}(z_0) = 0, f^p(z_0) \neq 0;$$

(b) On a

$$f^m(z_0) = 0$$

pour tout $m \geq 0$.

Dans le cas (a), nous dirons que z_0 est un *zéro de multiplicité p de $f(z)$*. Dans le cas (b), nous dirons que z_0 est un *zéro de multiplicité infinie de $f(z)$*.

En d'autres termes, la multiplicité de z_0 comme zéro de $f(z)$ est la borne inférieure de

$$\{m \geq 0 : f^{(m)}(z_0) \neq 0\}$$

dans $[0, +\infty]$.

Proposition 2.7.2. *Soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. Alors z_0 est un zéro de multiplicité $p \geq 1$ de f si et seulement s'il existe une fonction g holomorphe sur Ω telle que*

$$f(z) = (z - z_0)^p g(z), \qquad g(z_0) \neq 0.$$

En particulier, z_0 est un zéro isolé de f (i.e. il existe $\varepsilon > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$).

Démonstration. Supposons que z_0 est un zéro de multiplicité $p \geq 1$ de f. On a

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m$$

sur le disque ouvert $D(z_0, R)$ où $R = d(z_0, \complement\Omega)$. Comme $f^{(m)}(z_0) = 0$ pour $m = 0, \ldots, p-1$, on a en fait

$$f(z) = \sum_{m=p}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m = (z - z_0)^p \sum_{m=p}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^{m-p}.$$

Il s'ensuit que l'on peut définir une fonction g sur Ω en posant

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^p} & \text{si } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ \displaystyle\sum_{m=p}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^{m-p} & \text{si } z \in D(z_0, R) \end{cases}$$

et que cette fonction est holomorphe sur Ω. De plus, on a

$$g(z_0) = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \neq 0$$

et

$$f(z) = (z - z_0)^p g(z).$$

Réciproquement, si

$$f(z) = (z - z_0)^p g(z)$$

sur Ω, avec g holomorphe sur Ω tel que $g(z_0) \neq 0$, on a

$$f(z) = (z - z_0)^p \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{g^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{g^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^{m+p}$$

au voisinage de z_0. La conclusion en résulte. □

Proposition 2.7.3. *Soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. Alors z_0 est un zéro de multiplicité infinie de f si et seulement si f est identiquement nul sur la composante connexe de Ω contenant z_0. En particulier, z_0 est un zéro identique de f (i.e. il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit identiquement nul sur $D(z_0, \varepsilon)$).*

Démonstration. Si z est un zéro de multiplicité infinie de f dans Ω, alors en utilisant le développement de Taylor de f, on voit que f est identiquement nul sur un voisinage de z. L'ensemble Z_∞ des zéros de multiplicité infinie de f dans Ω est donc un ouvert non vide. Cet ensemble est par ailleurs aussi fermé dans Ω car il est égal à

$$\bigcap_{m \geq 0} \{z \in \Omega : f^{(m)}(z) = 0\}.$$

Si on désigne par Ω_0 la composante connexe de Ω contenant z_0, ce qui précède montre que les ouverts

$$\Omega_0 \cap Z_\infty \quad \text{et} \quad \Omega_0 \setminus Z_\infty$$

forment une partition de Ω_0. Comme le premier ouvert est non vide, la connexité de Ω_0 entraîne que le second ouvert doit être vide. La conclusion est alors immédiate. $\square$

Corollaire 2.7.4. *L'anneau des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ est intègre.*

Démonstration. Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω. Supposons que g ne soit pas identiquement nulle sur Ω et que fg soit identiquement nul sur cet ouvert. Il existe alors $z_0 \in \Omega$ tel que $g(z_0) \neq 0$. Vu la continuité de g sur Ω, z_0 possède un voisinage ouvert sur lequel g ne s'annule pas. Comme fg est identiquement nul sur ce voisinage, on en tire que z_0 est un zéro identique de f. Il découle alors de la proposition précédente que f est identiquement nul sur Ω. $\square$

Corollaire 2.7.5 (Principe d'unicité du prolongement holomorphe)**.** *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. Supposons que*

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

possède un point non isolé ou que f et g aient la même série de Taylor en un point de Ω. Alors f et g coïncident sur Ω tout entier.

Démonstration. En effet, si z_0 est un point non isolé de

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\},$$

alors z_0 est un zéro non isolé de $f-g$. Vu la Proposition 2.7.2, c'est donc un zéro de multiplicité infinie de $f-g$ et la conclusion résulte de la proposition précédente. Un raisonnement similaire permet de conclure lorsque les séries de Taylor de f et g en z_0 sont identiques. □

Remarque 2.7.6.

a) Il découle du corollaire précédent que les fonctions f et g coïncident sur Ω si elles coïncident sur un voisinage d'un point de Ω ou en les points d'une suite $(z_m)_{m\geq 1}$ de Ω qui converge par valeurs différentes vers un point z_0 de Ω.

(b) En particulier, si l'ouvert Ω possède des points réels et si les fonctions f et g coïncident sur $\Omega\cap\mathbb{R}$ alors $f=g$ sur Ω tout entier.

Exemples 2.7.7.

(a) En appliquant la remarque précédente, on voit de suite que les fonctions e^z, $\cos(z)$, $\sin(z)$, $\operatorname{cotg}(z)$, $\operatorname{tg}(z)$, $\ln(z)$, $\arccos(z)$, $\arcsin(z)$, $\operatorname{arccotg}(z)$, $\operatorname{arctg}(z)$ sont les seules extensions holomorphes possibles des fonctions réelles correspondantes à leur domaine d'holomorphie respectif.

(b) D'autres fonctions réelles usuelles peuvent aussi s'étendre au domaine complexe. C'est le cas par exemple de la fonction Γ d'Euler. Rappelons que cette fonction est définie sur $]0,+\infty[$ par la formule

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

et que l'on a

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$$

sur cet ouvert. Rappelons également que cette relation jointe à l'égalité $\Gamma(1)=1$ entraîne que $\Gamma(n+1)=n!$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Cela étant, puisque

$$|t^{z-1}e^{-t}|=t^{\Re z-1}e^{-t},$$

il est naturel d'étendre Γ au demi-plan

$$\Omega_0=\{z\in\mathbb{C}:\Re z>0\}$$

en posant

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

pour tout $z\in\Omega_0$.

Montrons que cette extension est holomorphe. Pour cela, il suffi d'appliquer le théorème de dérivation des intégrales paramétriques en remarquant que

(i) La fonction
$$f(z) = t^{z-1}e^{-t}$$
est holomorphe sur $\mathbb{C}$ pour tout $t > 0$ fixé ;

(ii) On a
$$f^{(p)}(z) = (\ln t)^p t^{z-1}e^{-t}$$
sur $\mathbb{C}$ pour tout $t > 0$ fixé ;

(iii) Si K est un compact de Ω_0 et si on pose
$$a = \inf\{\Re z : z \in K\} \quad \text{et} \quad b = \sup\{\Re z : z \in K\}$$
alors $0 < a < b$ et on peut majorer $|f^{(p)}(z)|$ sur K par la fonction intégrable
$$(\ln t)^p \left[t^{\alpha-1}e^{-t}\chi_{]0,1]}(t) + t^{\beta-1}e^{-t}\chi_{]1,+\infty[}(t)\right].$$

Puisque $\Gamma(z)$ est holomorphe sur Ω_0, le principe d'unicité du prolongement holomorphe entraîne que l'égalité
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$
s'étend de $]0,+\infty[$ à Ω_0 tout entier. Par itération, on en tire que
$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\ldots z\,\Gamma(z) \tag{*}$$
si $\Re z > 0$ et si $n \in \mathbb{N}_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il est donc possible d'étendre holomorphiquement $\Gamma(z)$ à l'ouvert
$$\Omega_n = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > -n, z \neq 0, \ldots z \neq -(n-1)\}$$
au moyen de la fonction
$$G_n(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}.$$
Comme
$$G_{n+1|\Omega_n} = G_n,$$
il existe alors une et une seule fonction holomorphe G sur
$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}),$$
telle que
$$G_{|\Omega_n} = G_n$$

pour tout n. Puisque Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, G est la seule extension holomorphe possible de la fonction Γ de $]0,+\infty[$ à Ω. C'est pourquoi on convient de poser

$$\Gamma(z) = G(z)$$

pour tout complexe z qui n'est pas un entier négatif ou nul.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n$ est donc une singularité isolée de $\Gamma(z)$. De plus, on a par construction

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

sur $D(-n,1) \setminus \{-n\}$. Il s'ensuit que

$$\lim_{z \longrightarrow -n} \Gamma(z) = \infty$$

et il n'est donc pas possible de prolonger continûment $\Gamma(z)$ à un ouvert strictement plus grand que Ω.

2.8 Séries de puissances entières

Définition 2.8.1. Une *série de puissances entières de* $(z-z_0)$ est une série bilatère du type

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m$$

dont les coefficients $a_m \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.8.2. *Soit*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m \tag{*}$$

une série de puissances entières et soient R_- et R_+ les rayons de convergence des séries de puissances naturelles

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} Z^m \qquad \sum_{m=1}^{\infty} a_m Z^m.$$

Convenons de poser

$$1/R_- = \begin{cases} 0 & \text{si } R_- = +\infty \\ +\infty & \text{si } R_- = 0. \end{cases}$$

Alors la série (*) converge normalement sur tout compact de l'ouvert

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1/R_- < |z-z_0| < R_+\}$$

et diverge hors du fermé

$$F = \{z \in \mathbb{C} : 1/R_- \leq |z - z_0| \leq R_+\}.$$

Démonstration. Cela découle directement de la théorie des séries de puissances naturelles puisque la convergence de la série étudiée en $z \neq z_0$ est équivalente à celle des séries

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} Z^m \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} a_m Z^m$$

respectivement en $Z = 1/(z - z_0)$ et en $Z = (z - z_0)$. □

Remarque 2.8.3. Si la série (*) converge en au moins un $z \neq z_0$ alors R_- et R_+ sont strictement positifs et $1/R_- \leq R_+$.

Si $1/R_- = R_+$ alors $\Omega = \emptyset$ et le domaine de convergence de la série (*) est une partie du cercle

$$\{z : |z - z_0| = R_+\}.$$

Si $1/R_- < R_+$ alors $\Omega \neq \emptyset$ et le domaine de convergence de la série (*) est l'union de l'ouvert Ω et d'une partie de sa frontière. Suivant les valeurs de R_- et de R_+, Ω est alors d'un des types suivants :

(a) Si $R_- < +\infty$ et $R_+ < +\infty$ alors Ω est la couronne circulaire

$$D(z_0, R_+) \setminus \overline{D(z_0, R_-)}.$$

(b) Si $R_- < +\infty$ et $R_+ = +\infty$ alors Ω est le plan excisé

$$\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, 1/R_-)}.$$

(c) Si $R_- = +\infty$ et $R_+ < +\infty$ alors Ω est le disque épointé

$$D(z_0, R_+) \setminus \{z_0\}.$$

(d) Si $R_- = +\infty$ et $R_+ = +\infty$ alors Ω est le plan épointé

$$\mathbb{C} \setminus \{z_0\}.$$

Dans les cas (a) et (b), Ω est aussi le plus grand ouvert où la série (*) est convergente.

Dans les cas (c) et (d) ce plus grand ouvert de convergence est égal à Ω ou à $\Omega \cup \{z_0\}$ suivant que la série (*) contient ou ne contient pas effectivement des termes d'indice $m < 0$.

Corollaire 2.8.4. *Plaçons nous dans les conditions de la proposition précédente et notons $f(z)$ la somme de la série (*). Alors $f(z)$ est holomorphe sur Ω et on a*

$$a_m = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\, dz$$

si C_r est un cercle de centre z_0 et de rayon $r \in]1/R_-, R_+[$.

Démonstration. Cela découle directement de la proposition précédente et du fait que

$$\int_{C_r} (z-z_0)^{n-1} dz = 2i\pi\delta_{n0}$$

si $r > 0$. □

2.9 Développements et décompositions de Laurent

Le dernier corollaire de la section précédente admet en quelque sorte une réciproque.

Proposition 2.9.1. *Soient a et b deux éléments de $[0, +\infty]$. Supposons que $a < b$ et que la fonction f soit holomorphe sur la couronne circulaire*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : a < |z-z_0| < b\}.$$

Notons C_r un cercle de centre z_0 et de rayon $r \in]a, b[$ et posons

$$a_m = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\, dz.$$

Alors,

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m;$$

sur Ω.

Démonstration. Soit $z \in \Omega$. Il existe alors des réels α et β tels que $a < \alpha < |z-z_0| < \beta < b$. Considérons le compact

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq |z-z_0| \leq \beta\}.$$

Ce compact est clairement bordé par la chaîne $C_\beta \cup C_\alpha^-$ où C_α, C_β sont respectivement les cercles de centres z_0 et de rayons α et β orientés trigonométriquement. On a donc

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\beta \cup C_\alpha^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{C_\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{C_\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right).$$

Si $\zeta \in C_\beta$, on a

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^m.$$

De plus, la série de droite converge normalement en ζ sur C_β puisque sur cet ensemble on a

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{\beta} < 1.$$

Si $\zeta \in C_\alpha$, on a

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{f(\zeta)}{z_0 - z}\,\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{z_0 - z}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^m.$$

De plus, la série de droite converge uniformément en ζ sur C_α puisque sur cet ensemble on a

$$\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{\alpha}{|z-z_0|} < 1.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$\begin{aligned} f(z) = &\sum_{m=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_{C_\beta}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}\,d\zeta\right](z-z_0)^m \\ &+ \sum_{m=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_{C_\alpha}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-m}}\,d\zeta\right](z-z_0)^{-m-1}. \end{aligned}$$

Comme la fonction

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^m}$$

est holomorphe sur Ω pour tout $m \in \mathbb{Z}$, il résulte du théorème de Cauchy que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^m}\,d\zeta$$

ne dépend pas de $r \in \,]a,b[$. Ainsi, on a en fait

$$\begin{aligned} f(z) = &\sum_{m=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}\,d\zeta\right](z-z_0)^m \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}\,d\zeta\right](z-z_0)^m \end{aligned}$$

et la conclusion en découle. □

Définition 2.9.2. Dans les conditions de la proposition précédente, on dit que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m(z-z_0)^m$$

est la *série de Laurent de f en z_0*.

Corollaire 2.9.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit z_0 un point de Ω et soit $0 \leq a < d(z_0, \complement\Omega)$. Supposons que f soit une fonction holomorphe sur*

$$\{z \in \Omega : |z-z_0| > a\}.$$

et convenons de poser $1/a = +\infty$ si $a = 0$. Alors, il existe un unique couple de fonctions (h, H) pour lequel :

(i) h est holomorphe sur Ω ;

(ii) H est holomorphe sur $D(0, 1/a)$ et $H(0) = 0$;

(iii) on a

$$f(z) = h(z) + H\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$$

sur $\{z \in \Omega : |z-z_0| > a\}$.

Démonstration. Soit $b = d(z_0, \complement\Omega)$. Comme f est holomorphe sur

$$\{z \in \mathbb{C} : a < |z-z_0| < b\},$$

il découle de la proposition précédente que

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(z-z_0)^m + \sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}$$

où

$$a_m = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\, dz.$$

pour un $r \in]a, b[$. Il est alors clair que

$$H(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} Z^m$$

est une fonction holomorphe sur $D(0, 1/a)$ qui s'annule en 0. Pour tout $z \in \Omega$, posons

$$h(z) = \begin{cases} f(z) - H\left(\dfrac{1}{z-z_0}\right) & \text{si } |z-z_0| > a; \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(z-z_0)^m & \text{si } |z-z_0| < b. \end{cases}$$

Par construction, il est clair que $h(z)$ est holomorphe sur Ω et que

$$f(z) = h(z) + H\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$$

sur cet ouvert. L'existence du couple (h, H) est donc acquise. Pour établir son unicité, il suffit de montrer que si

$$0 = h(z) + H\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$$

sur

$$\{z \in \Omega : |z - z_0| > a\}$$

avec h holomorphe sur Ω et H holomorphe sur $D(0, 1/a)$ tel que $H(0) = 0$, alors $h = 0$ et $H = 0$. Comme la relation

$$h(z) = -H\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$$

montre que la fonction

$$z \mapsto \begin{cases} h(z) & \text{si } z \in \Omega \\ -H\left(\frac{1}{z-z_0}\right) & \text{si } |z - z_0| > a \end{cases}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et tend vers zéro si $z \to \infty$, la conclusion résulte du théorème de Liouville. □

Définition 2.9.4. Dans les conditions du corollaire précédent, on dit que le couple (h, H) est la *décomposition de Laurent de f en z_0*.

2.10 Singularités isolées des fonctions holomorphes

Les résultats de la section précédente sont particulièrement utiles dans le cas où $a = 0$. Dans ce cas, ils peuvent se résumer comme suit :

Proposition 2.10.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant z_0 et soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. Alors, f est développable en série de Laurent sur la couronne ouverte*

$$U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < d(z_0, \complement\Omega)\}.$$

En particulier, il existe un unique couple de fonctions (h, H) pour lequel

(i) h est holomorphe sur Ω ;

(ii) *H est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $H(0) = 0$;*

(iii) *on a*

$$f(z) = h(z) + H\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$$

sur $\Omega \setminus \{z_0\}$.

Démonstration. Cela résulte directement de la combinaison de la Proposition 2.9.1 et du Corollaire 2.9.3. □

Définition 2.10.2. Dans les conditions de la proposition précédente, on dit que z_0 est une *singularité isolée de f dans Ω*.

A une telle singularité, la proposition précédente associe un unique couple (h, H). On dit que h est la *partie régulière de f en z_0* et que H est la *partie singulière de f en z_0*.

Suivant la nature de H, on distingue alors les cas suivants :

(i) si $H = 0$, on dit que z_0 est une *singularité effaçable* de f ;

(ii) si H est un polynôme de degré $p > 0$, on dit que z_0 est un *pôle d'ordre p* de f ;

(iii) si H n'est pas un polynôme, on dit que z_0 est une *singularité essentielle* de f.

2.11 Singularités isolées effaçables

Remarquons d'abord que le choix de l'adjectif effaçable est justifié puisque :

Proposition 2.11.1. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si z_0 une singularité isolée de f dans Ω, alors z_0 est une singularité effaçable de f si et seulement si f admet une extension holomorphe à Ω tout entier.*

Démonstration. Cela résulte directement du fait que z_0 est une singularité effaçable de f si et seulement si f coïncide sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ avec sa partie régulière en z_0 . □

Exemple 2.11.2. La fonction

$$\frac{\sin z}{z}$$

a une singularité effaçable en 0. En effet, on a

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m+1)!}$$

sur $\mathbb{C}_0$. L'extension holomorphe de

$$\frac{\sin z}{z}$$

à $\mathbb{C}$ est la somme de la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m+1)!}.$$

Cette extension est la fonction *sinus cardinal*[6] ; on la note $\operatorname{sinc}(z)$.

Remarquons aussi que l'on peut caractériser l'effaçabilité d'une singularité isolée par le comportement de $f(z)$ lorsque z tend vers z_0 par valeurs différentes :

Proposition 2.11.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit z_0 une singularité isolée de f dans Ω. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) la singularité z_0 est effaçable pour f ;

(b) la limite

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \neq}} f(z)$$

existe et est finie ;

(c) la fonction $f(z)$ est bornée pour $z \neq z_0$ voisin de z_0.

Démonstration. Reprenons les notations de la Définition 2.10.2.

(a) $\Rightarrow$ (b). On a

$$f(z) = h(z)$$

et il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \neq}} f(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \neq}} h(z) = h(z_0).$$

(b) $\Rightarrow$ (c). C'est bien connu.

(c) $\Rightarrow$ (a). Comme $f(z)$ est borné pour $z \neq z_0$ voisin de z_0, il en est de même de

$$H\left(\frac{1}{z - z_0}\right).$$

Il s'ensuit que H est borné pour $|z - z_0|$ grand. Le théorème de Liouville montre alors que H est constant sur $\mathbb{C}$. Comme $H(0) = 0$, on a $H = 0$, d'où la conclusion. □

6. Cette fonction est très utile par exemple en théorie de l'échantillonnage.

2.12 Singularités isolées polaires

Le choix de la terminologie est justifié par le résultat suivant :

Proposition 2.12.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit z_0 une singularité isolée de f dans Ω. Alors, la fonction f a un pôle d'ordre $p > 0$ en z_0 si et seulement s'il existe une fonction g holomorphe sur Ω qui ne s'annule pas en z_0 et pour laquelle*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p}$$

sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. De plus, dans ce cas, le développement de Laurent de f en z_0 est donné par

$$\sum_{m=0}^{+\infty} b_m (z - z_0)^{m-p}$$

où b_m est le coefficient de Taylor d'indice m de g en z_0.

Démonstration. Supposons d'abord que z_0 soit un pôle d'ordre p de f. Par définition, la série de Laurent de $f(z)$ en z_0 est alors de la forme

$$\sum_{m=-p}^{+\infty} a_m (z - z_0)^m$$

avec $a_{-p} \neq 0$. Il s'ensuit que $(z - z_0)^p f(z)$ possède une singularité effaçable en z_0 et admet donc un prolongement holomorphe unique $g(z)$ à Ω. De plus, comme $g(z_0) = a_{-p}$, il est clair que $g(z)$ ne s'annule pas en z_0. La conclusion résulte alors de ce que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p}$$

sur $\Omega \setminus \{z_0\}$.

Supposons maintenant qu'il existe une fonction g holomorphe sur Ω qui ne s'annule pas en z_0 et pour laquelle

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p}$$

sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. Soit

$$\sum_{m=0}^{+\infty} b_m (z - z_O)^m$$

le développement de Taylor de $g(z)$ en z_0. Vu nos hypothèses, il est clair que $b_0 \neq 0$ et que

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m (z - z_0)^{m-p}$$

sur $\Omega\backslash\{z_0\}$. Le second membre de cette égalité est donc le développement de Laurent de $f(z)$ en z_0. Il en résulte aussitôt que z_0 est un pôle d'ordre p de $f(z)$ et que l'on peut calculer la série de Laurent de $f(z)$ en z_0 au moyen des coefficients de Taylor de $g(z)$ en procédant comme indiqué dans l'énoncé. □

Exemple 2.12.2. La fonction

$$\frac{\cos z}{z^p} \quad (p \in \mathbb{N}_0)$$

a un pôle d'ordre p en 0 puisque $\cos(0) = 1 \neq 0$.

Remarque 2.12.3. Dans les conditions de la proposition précédente, il est clair que la partie singulière de $f(z)$ en z_0 est donnée par

$$\sum_{m=0}^{p-1} b_m (z - z_0)^{m-p}.$$

Cette partie singulière peut donc s'obtenir à partir des termes d'indice $m \leq p - 1$ du développement de Taylor de $g(z)$ en z_0.

Exemple 2.12.4. Calculons la partie singulière de

$$f(z) = 1/(\sin z)^5$$

en 0 en utilisant la méthode suggérée dans la remarque précédente. Comme

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + o(z^5)$$

on voit que 0 est un pôle d'ordre 5 de $f(z)$ et que

$$g(z) = [1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + o(z^4)]^{-5}$$

pour z voisin de 0. Puisque

$$(1 - Z)^{-5} = 1 + 5Z + 15Z^2 + o(Z^2)$$

pour Z voisin de 0, on a aussi

$$\begin{aligned} g(z) &= 1 + 5\left[\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120}\right] + 15\left[\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120}\right]^2 + o(z^4) \\ &= 1 + \frac{5}{6}z^2 + \frac{3}{8}z^4 + o(z^4) \end{aligned}$$

pour z voisin de 0. Il s'ensuit que la partie singulière cherchée est

$$z^{-5} + \frac{5}{6}z^{-3} + \frac{3}{8}z^{-1}.$$

Comme pour les singularités effaçables, il est aussi possible de caractériser les pôles d'ordre $p > 0$ au moyen du comportement de $f(z)$ lorsque z tend vers z_0 par valeurs différentes :

Proposition 2.12.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit z_0 une singularité isolée de f dans Ω et soit $p > 0$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *z_0 est un pôle d'ordre p ;*

(b) *la limite*

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \neq}} (z - z_0)^p f(z)$$

existe et appartient à $\mathbb{C}_0$;

(c) *la fonction*

$$(z - z_0)^p f(z)$$

est bornée pour $z \neq z_0$ voisin de z_0 et la fonction

$$(z - z_0)^{p-1} f(z)$$

n'est bornée sur aucun voisinage de z_0 privé de z_0.

Démonstration. Il est clair que la fonction f a un pôle d'ordre p en z_0 si et seulement si la fonction

$$(z - z_0)^p f(z)$$

a une singularité effaçable en z_0 et si la fonction

$$(z - z_0)^{p-1} f(z)$$

a une singularité non-effaçable en z_0. La conclusion découle donc de la Proposition 2.11.3. □

2.13 Singularités isolées d'ordre fini

Définition 2.13.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit z_0 une singularité isolée de f dans Ω. Supposons que f ne soit identiquement nul sur aucun voisinage épointé de z_0 et que z_0 soit une singularité effaçable ou un pôle de f. Dans ce cas, on dit que z_0 est une *singularité d'ordre fini de f* et on définit l'ordre $\operatorname{ord}_{z_0}(f)$ de f en z_0 en posant

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f) = p$$

si z_0 est un pôle d'ordre $p > 0$ de f,

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f) = -p$$

si z_0 est une singularité effaçable de f qui est un zéro de multiplicité $p > 0$ de la partie régulière de f en z_0 et

$$\mathrm{ord}_{z_0}(f) = 0$$

si z_0 est une singularité effaçable de f qui n'est pas un zéro de de la partie régulière de f en z_0.

Proposition 2.13.2. *Soit z_0 une singularité isolée d'ordre fini de f et de g dans l'ouvert Ω. Alors z_0 est une singularité isolée d'ordre fini de fg et de f/g et on a*

$$\mathrm{ord}_{z_0}(fg) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) + \mathrm{ord}_{z_0}(g) \quad \textit{et} \quad \mathrm{ord}_{z_0}(f/g) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) - \mathrm{ord}_{z_0}(g).$$

Démonstration. Cela résulte directement de la conjonction de la Proposition 2.7.2 et de la Proposition 2.12.1. □

Exemples 2.13.3. (a) Considérons la fonction

$$\mathrm{cotg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Comme les zéros de $\sin z$ sont les complexes de la forme $z = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et comme

$$\sin'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

il est clair que $\mathrm{cotg}\, z$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\pi)$ et que $k\pi$ est un pôle d'ordre 1 de $\mathrm{cotg}\, z$ quelque soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculons le développement de Laurent de $\mathrm{cotg}\, z$ en $z = 0$. Un calcul direct montre que sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\pi)$ on a

$$z\,\mathrm{cotg}\, z = \Phi(2iz) + iz$$

où Φ est la fonction considérée dans les Exemples 2.6.6. En effet,

$$\Phi(2iz) + iz = \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} + iz = iz\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = z\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Comme

$$\Phi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m!} z^m$$

pour $z \in D(0, 2\pi)$, on en tire que

$$z\,\mathrm{cotg}\, z = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m!}(2i)^m z^m + iz = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n^*}{(2n)!} z^{2n}$$

si $z \in D(0, \pi) \setminus \{0\}$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{cotg}\, z = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n^*}{(2n)!} z^{2n-1}$$

sur $D(0,\pi)\setminus\{0\}$. Puisque
$$\operatorname{cotg}(z+\pi)=\operatorname{cotg}(z)$$
pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{Z}\pi)$, il résulte de ce qui précède que
$$\operatorname{cotg} z=\frac{1}{(z-k\pi)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n^*}{(2n)!}(z-k\pi)^{2n-1}$$
pour tout $z\in D(k\pi,\pi)\setminus\{k\pi\}$.

(b) En procédant comme en (a), on voit aisément que
$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}$$
est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus(\pi/2+\mathbb{Z}\pi)$ et que $\pi/2+k\pi$ est un pôle simple de $\operatorname{tg} z$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$. Comme
$$\operatorname{tg} z=-\operatorname{cotg}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)$$
on tire de (a) que
$$\operatorname{tg} z=\frac{-1}{(z-\pi/2-k\pi)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n^*}{(2n)!}(z-\pi/2-k\pi)^{2n-1}$$
pour tout $z\in D(\pi/2+k\pi,\pi)\setminus\{\pi/2+k\pi\}$.

2.14 Singularités isolées essentielles

Le comportement de $f(z)$ lorsque z approche une singularité essentielle est très différent de ce qui se passe pour les singularités effaçables ou pour les pôles. En effet :

Proposition 2.14.1. *Soit z_0 une singularité isolée de f. Alors,*

(a) si z_0 est une singularité effaçable, on a
$$\lim_{\substack{z\longrightarrow z_0\\ \neq}} f(z)\in\mathbb{C};$$

(b) si z_0 est un pôle d'ordre $p>0$, on a
$$\lim_{\substack{z\longrightarrow z_0\\ \neq}} f(z)=\infty;$$

(c) *si z_0 est une singularité essentielle, alors pour tout $w_0 \in \mathbb{C}$, il existe une suite $(z_m)_{m\geq 1}$ de complexes distincts de z_0 telle que*

$$z_m \to z_0, \qquad f(z_m) \to w_0.$$

Démonstration. (a) et (b) sont des conséquences directes des résultats précédents.

(c) Si tout voisinage V de z_0 contient $z \neq z_0$ tel que $f(z) = w_0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, il existe un voisinage V de z_0 tel que $f(z) - w_0$ ne s'annule pas sur $V \setminus \{z_0\}$. La fonction $f(z) - w_0$ présente une singularité essentielle en z_0. Il en est donc de même de la fonction

$$\frac{1}{f(z) - w_0}$$

car sinon elle aurait une singularité d'ordre fini en z_0 et il en serait de même de $f(z) - w_0$. Cette fonction n'est donc bornée dans aucun voisinage épointé de z_0 et il existe une suite $(z_m)_{m\geq 1}$ de complexes distincts de z_0 telle que $z_m \to z_0$ et pour laquelle

$$\frac{1}{f(z_m) - w_0} \to \infty.$$

Pour cette suite, on a

$$f(z_m) \to w_0,$$

d'où la conclusion. □

Exemple 2.14.2. La fonction

$$e^{1/z}$$

a une singularité essentielle en $z = 0$ puisque

$$e^{1/z} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^{-m}}{m!}$$

sur $\mathbb{C}_0$. En particulier l'image d'un voisinage de ∞ dans $\mathbb{C}$ par la fonction exponentielle est dense dans $\mathbb{C}$.

2.15 Théorème des résidus

Définition 2.15.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant z_0. Le *résidu* en z_0 d'une fonction f holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ est le coefficient de

$$\frac{1}{z - z_0}$$

dans le développement de Laurent de f en z_0 ; on le note $\operatorname{Res}_{z_0} f$. D'après la Proposition 2.9.1, on a donc aussi

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} f(z)\, dz$$

si C_r est un cercle de centre z_0 et de rayon $r < d(z_0, \complement\Omega)$.

Pour calculer les résidus, on dispose bien sûr de tous les outils mis au point pour le calcul des parties singulières d'une fonction holomorphe en une singularité isolée. On dispose aussi de résultats plus spécifiques :

Proposition 2.15.2. *Si z_0 est un pôle d'ordre $p > 0$ de f, on a*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \neq}} \frac{1}{(p-1)!} \left[(z-z_0)^p f(z)\right]^{(p-1)}.$$

Démonstration. Cela résulte de la Proposition 2.12.1. En effet, en gardant les notations introduites dans cette proposition, on a

$$(z-z_0)^p f(z) = g(z).$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \neq}} \frac{1}{(p-1)!} \left[(z-z_0)^p f(z)\right]^{(p-1)}$$

est le coefficient d'indice $p-1$ de la série de Taylor de g en z_0 ; d'où la conclusion. □

Le cas particulier des pôles simples est particulièrement facile à traiter.

Corollaire 2.15.3. *Si z_0 est un pôle simple de f, alors*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \neq}} (z-z_0) f(z).$$

En particulier, si

$$f = \frac{g}{h}$$

avec g et h holomorphes sur un voisinage de z_0 et si z_0 est un zéro de multiplicité $p \geq 0$ de g et de multiplicité $p+1$ de h alors

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = (p+1) \frac{g^{(p)}(z_0)}{h^{(p+1)}(z_0)}.$$

Démonstration. C'est immédiat. □

Exemples 2.15.4.
(a) Le résidu de
$$\frac{\sin z}{z}$$
en 0 est $\sin 0 = 0$. Plus généralement, le résidu en une singularité effaçable est toujours nul.
(b) Le résidu de
$$\frac{\cos z}{z}$$
en 0 est $\cos 0 = 1$.
(c) Le résidu de $\operatorname{cotg} z$ en $k\pi$ est
$$\frac{\cos(k\pi)}{\cos(k\pi)} = 1.$$
(d) Le résidu de $e^{1/z}$ en 0 est 1.
(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme
$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)(z+n)}$$
sur un voisinage de $-n$, il est clair que
$$\lim_{z \longrightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)\dots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$
Il s'ensuit que $-n$ est un pôle simple de $\Gamma(z)$ et que
$$\operatorname{Res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

L'intérêt de la notion de résidu provient surtout du résultat suivant :

Proposition 2.15.5 (Théorème des Résidus)**.** *Soit K un compact de $\mathbb{C}$ bordé par une courbe orientée C et soient $z_1, \dots, z_L$ des points intérieurs à K. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant K et f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_L\}$. Alors*
$$\int_C f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{l=1}^{L} \operatorname{Res}_{z_l} f.$$

Démonstration. Vu les hypothèses, on peut trouver une famille de disques fermés
$$\overline{D(z_1, r_1)}, \dots, \overline{D(z_L, r_L)}$$

deux à deux disjoints et inclus dans K°. On montre alors aisément que

$$K \setminus [D(z_1, r_1) \cup \cdots \cup D(z_L, r_L)]$$

est un compact de $\mathbb{C}$ bordé par la courbe orientée

$$C \cup C_1^- \cup \cdots \cup C_L^-$$

où $C_1, \ldots, C_L$ sont les cercles bordant $D(z_1, r_1), \ldots, D(z_L, r_L)$ orientés trigonométriquement. Vu le théorème de Cauchy, il s'ensuit que

$$\int_{C \cup C_1^- \cup \cdots \cup C_L^-} f(z)\, dz = 0$$

et par conséquent que

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \cdots + \int_{C_L} f(z)\, dz.$$

Or, $z_1, \ldots, z_L$ étant des singularités isolées de f, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} f(z)\, dz = \operatorname{Res}_{z_1} f, \ldots, \frac{1}{2i\pi} \int_{C_L} f(z)\, dz = \operatorname{Res}_{z_L} f,$$

d'où la conclusion. □

2.16 Calcul d'intégrales par résidus

La proposition précédente est à la base de nombreuses méthodes de calcul d'intégrales. Nous allons en considérer quelques-unes. D'autres cas seront traités aux répétitions.

Proposition 2.16.1 (Calcul des intégrales de type I)**.** *Soit D le disque de centre 0 et de rayon 1 et soient $z_0 = 0$ et $z_1, \ldots, z_J$ des points deux à deux distincts de D. Supposons que f soit définie et continue sur $\overline{D} \setminus \{z_0, \ldots, z_J\}$ et holomorphe sur $D \setminus \{z_0, \ldots, z_J\}$. Alors, on a*

$$\int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} f(e^{i\theta})\, d\theta = 2\pi \left[\operatorname{Res}_{z_0}(f(z)/z) + \cdots + \operatorname{Res}_{z_J}(f(z)/z)\right]$$

pour tout $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Choisissons un rayon $r \in]0, 1[$ tel que

$$\{z_0, \ldots, z_J\} \subset D(0, r).$$

En appliquant le théorème des résidus à la fonction $f(z)/z$ et au compact $\overline{D(0,r)}$, on voit que

$$\int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z}\,dz = 2i\pi\left[\mathrm{Res}_{z_0}\frac{f(z)}{z} + \cdots + \mathrm{Res}_{z_J}\frac{f(z)}{z}\right].$$

Puisque

$$\int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z}\,dz = \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\,d\theta$$

on en tire que

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} f(re^{i\theta})\,d\theta = 2\pi\left[\mathrm{Res}_{z_0}(f(z)/z) + \cdots + \mathrm{Res}_{z_J}(f(z)/z)\right]$$

et la conclusion s'obtient en faisant tendre r vers 1^-. □

Exemple 2.16.2. Appliquons la proposition précédente pour calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x}$$

lorsque $a > b \geq 0$ dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas la fonction $f(z)$ est

$$\frac{1}{a+b\frac{z+1/z}{2}}.$$

On a donc

$$f(z) = \frac{2z}{(bz^2+2az+b)}.$$

Or, $bz^2+2az+b=0$ si et seulement si

$$z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

La fonction $f(z)/z$ a donc deux pôles simples. Seul

$$z_+ = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

est à l'intérieur du disque unité. Donc,

$$I = 2\pi\,\mathrm{Res}_{z_+}(f(z)/z) = 2\pi\frac{2}{2bz_+ + 2a} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Proposition 2.16.3 (Calcul d'intégrales de type IIa). *Soit H le demi-plan ouvert*

$$\{z : \Im z > 0\}$$

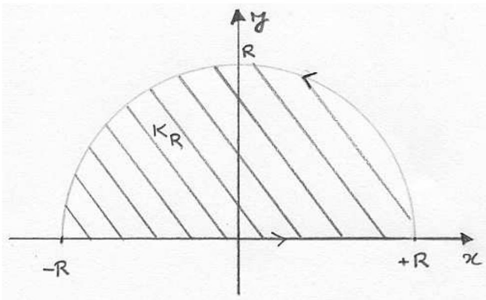
et soient $z_1, \ldots, z_J$ des points deux à deux distincts de H. Supposons que f soit défini et continu sur $\overline{H} \setminus \{z_1, \ldots, z_J\}$ et holomorphe sur $H \setminus \{z_1, \ldots, z_J\}$ et qu'il existe un $\alpha > 1$ pour lequel

$$f(z) = O(|z|^{-\alpha})$$

si $z \to \infty$ dans $\overline{H}$. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2i\pi \left[\mathrm{Res}_{z_1} f + \cdots + \mathrm{Res}_{z_J} f\right].$$

Démonstration. Notons K_R le demi-disque fermé de centre 0 et de rayon $R > 0$ situé dans le demi-plan $\overline{H}$ et C_R le demi-cercle correspondant.



Choisissons $\eta_0 > 0$ suffisamment petit et $R_0 > 0$ suffisamment grand pour que

$$\{z_1, \ldots, z_J\} \subset K_R + i\eta$$

pour tout R supérieur à R_0 et tout $\eta > 0$ inférieur à η_0. En appliquant le théorème des résidus à f et à $K_R + i\eta$ pour $R \in]R_0, +\infty[$ et $\eta \in]0, \eta_0[$, on voit que

$$\int_{[-R+i\eta, R+i\eta]} f(z)\, dz + \int_{C_R+i\eta} f(z)\, dz = 2i\pi \left[\mathrm{Res}_{z_1} f + \cdots + \mathrm{Res}_{z_J} f\right].$$

En passant à la limite pour $\eta \to 0^+$, on en tire que

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz = 2i\pi \left[\mathrm{Res}_{z_1} f + \cdots + \mathrm{Res}_{z_J} f\right]. \qquad (*)$$

Puisque

$$f(z) = O(|z|^{-\alpha})$$

si $z \to \infty$ dans $\overline{H}$, on a aussi

$$f(x) = O(|x|^{-\alpha})$$

pour $x \to \infty$ dans $\mathbb{R}$ et il est clair que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

De plus, comme

$$\int_{C_R} f(z)\, dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta}\, d\theta$$

il existe $C > 0$ tel que

$$\left| \int_{C_R} f(z)\, fz \right| \leq \int_0^{\pi} CR^{-\alpha} R\, d\theta \leq C\pi R^{1-\alpha}$$

si R est suffisamment grand. Comme $\alpha > 1$, il s'ensuit que

$$\lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$$

et un passage à la limite pour $R \to +\infty$ dans (*) permet de conclure. $\square$

Exemple 2.16.4. A titre d'exemple d'utilisation de la proposition précédente, calculons

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

pour $n \in \mathbb{N}_0$, $a > 0$. Les pôles de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(z^2 + a^2)^n}$$

sont $\pm ia$ et chacun est d'ordre n. Ainsi,

$$2I = 2i\pi \operatorname{Res}_{ia} \left[\frac{1}{(z^2 + a^2)^n} \right] = \frac{2i\pi}{(n-1)!} \lim_{\substack{z \longrightarrow ia \\ \neq}} \left[\frac{(z - ia)^n}{(z^2 + a^2)^n} \right]^{(n-1)}.$$

Or,

$$\frac{(z - ia)^n}{(z^2 + a^2)^n} = (z + ia)^{-n}$$

et

$$\left[(z + ia)^{-n} \right]^{(n-1)} = -n(-n-1)\ldots(-n-(n-1)+1)(z+ia)^{-2n+1}.$$

Donc,

$$2I = \frac{2i\pi}{(n-1)!} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(2ia)^{2n-1}}$$

et

$$I = \frac{\pi}{(n-1)!^2} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} a^{2n-1}}.$$

Nous allons maintenant montrer que l'on peut relâcher sensiblement les conditions imposées à la fonction f dans la proposition 2.16.3 si on ne cherche plus à calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

mais seulement la valeur principale de Cauchy de celle-ci.

Proposition 2.16.5. *Soit f une fonction définie presque partout sur R. Supposons qu'il existe des réels*

$$x_1 < \cdots < x_J$$

tels que f soit localement intégrable sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_J\}$ et pour lesquels la limite

$$\begin{aligned} I = \lim_{\substack{(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_J)\longrightarrow(0,\ldots,0)\\ \varepsilon_0>0,\ldots,\varepsilon_J>0}} & \int_{-1/\varepsilon_0}^{x_1-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon_1}^{x_2-\varepsilon_2} f(x)\,dx \\ & + \cdots \\ & + \int_{x_{J-1}+\varepsilon_{J-1}}^{x_J-\varepsilon_J} f(x)\,dx + \int_{x_J+\varepsilon_J}^{1/\varepsilon_0} f(x)\,dx \end{aligned}$$

existe et soit finie. Alors I est indépendant du choix des $x_1, \ldots, x_J$.

Démonstration. Si f est intégrable sur un voisinage d'un des x_j, il est clair que l'on peut omettre celui-ci sans changer la valeur de I. On peut donc se ramener au cas où les x_j sont les réels en lesquels f n'est pas localement intégrable. Comme ces réels sont canoniquement associés à f la conclusion en résulte. □

Définition 2.16.6. Dans les conditions de la proposition précédente, on dit que I est la *valeur principale de Cauchy* de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

et on pose

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = I.$$

Remarque 2.16.7. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$ il est clair que

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

mais le membre de gauche peut avoir une valeur sans que le membre de droite en ait une. Par exemple, si $x_1 < \cdots < x_J$ sont des réels et si les intégrales fléchées

$$\int_{\to -\infty}^{\to x_1} f(x)\,dx, \qquad \int_{\to x_1}^{\to x_2} f(x)\,dx, \cdots, \qquad \int_{\to x_{J-1}}^{\to x_J} f(x)\,dx, \qquad \int_{\to x_J}^{\to +\infty} f(x)\,dx$$

existent alors il en est de même de

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

et cette valeur principale est la somme des intégrales fléchées considérées ci-dessus.

Exemples 2.16.8.
(a) Calculons

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

Vu la définition précédente, on a

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\substack{(\varepsilon_0,\varepsilon_1)\longrightarrow(0,0)\\ \varepsilon_0>0,\varepsilon_1>0}} \int_{-1/\varepsilon_0}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_1}^{1/\varepsilon_0} \frac{dx}{x} \\
&= \lim_{\substack{(\varepsilon_0,\varepsilon_1)\longrightarrow(0,0)\\ \varepsilon_0>0,\varepsilon_1>0}} \ln|x|\big|_{-1/\varepsilon_0}^{-\varepsilon_1} + \ln|x|\big|_{\varepsilon_1}^{1/\varepsilon_0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) Calculons

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-i)}.$$

Comme

$$f(x) = \frac{1}{x(x-i)} = \frac{x+i}{x(x^2+1)} = \frac{i}{x} - \frac{ix-1}{x^2+1}$$

admet

$$F(x) = i \ln|x| - \frac{i}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x$$

pour primitive sur $\mathbb{R}_0$, on a

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\substack{(\varepsilon_0,\varepsilon_1)\longrightarrow(0,0)\\ \varepsilon_0>0,\varepsilon_1>0}} F(x)\big|_{-1/\varepsilon_0}^{-\varepsilon_1} + F(x)\big|_{\varepsilon_1}^{1/\varepsilon_0} \\
&= \lim_{\substack{(\varepsilon_0,\varepsilon_1)\longrightarrow(0,0)\\ \varepsilon_0>0,\varepsilon_1>0}} 2\operatorname{arctg}(1/\varepsilon_0) - 2\operatorname{arctg}(\varepsilon_1) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Proposition 2.16.9 (Valeurs principales d'intégrales de type IIb)**.** *Soit H le demi-plan ouvert*

$$\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\},$$

soient $x_1 < \cdots < x_J$ des réels et soient $z_1, \ldots, z_K$ des points deux à deux distincts de H. Supposons que *(a) f soit défini et continu sur $\overline{H} \setminus \{x_1, \ldots, x_J, z_1, \ldots, z_K\}$;*

(b) f soit holomorphe sur $H \setminus \{z_1, \ldots, z_K\}$;

(c) la limite

$$\lambda_j = \lim_{\substack{z \longrightarrow x_j \\ z \in \overline{H}}} (z - x_j) f(z)$$

existe et soit finie ;

(d) la limite

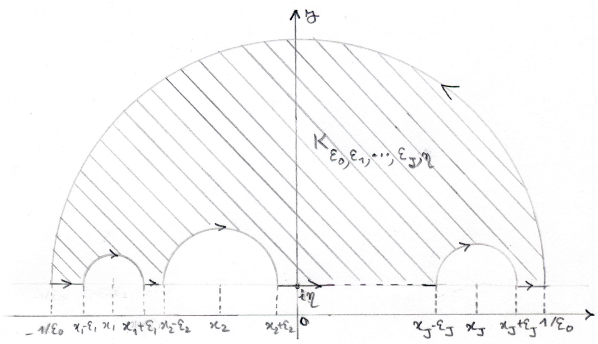
$$\lambda_\infty = \lim_{\substack{z \longrightarrow \infty \\ z \in \overline{H}}} z f(z)$$

existe et soit finie.

Alors, on a

$$\mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2i\pi \left[\mathrm{Res}_{z_1} f + \cdots + \mathrm{Res}_{z_K} f\right] + i\pi \left[\lambda_1 + \cdots + \lambda_J - \lambda_\infty\right].$$

Démonstration. Notons $K_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_J, \eta}$ le compact représenté ci-dessous :



Il est clair que

$$K^\circ_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_J, \eta} \supset \{z_1, \ldots, z_K\}$$

pour $\varepsilon_0 > 0, \varepsilon_1 > 0, \ldots, \varepsilon_J > 0, \eta > 0$ suffisamment petits. En appliquant le théorème des résidus à $f(z)$ et $K_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_J, \eta}$ et en passant à la limite pour $\eta \to 0^+$, on voit que

$$\int_{-1/\varepsilon_0}^{x_1 - \varepsilon_1} f(x)\, dx - \int_{C(x_1, \varepsilon_1)} f(z)\, dz + \cdots + \int_{x_J + \varepsilon_J}^{1/\varepsilon_0} f(x)\, dx + \int_{C(0, 1/\varepsilon_0)} f(z)\, dz$$
$$= 2i\pi \left[\mathrm{Res}_{z_1} f + \cdots + \mathrm{Res}_{z_K} f\right].$$

De plus, vu nos hypothèses et le lemme des petites encoches (voir ci-dessous) on a

$$\lim_{\varepsilon_j \longrightarrow 0^+} \int_{C(x_j,\varepsilon_j)} f(z)\, dz = i\pi\lambda_j.$$

Comme le lemme des grandes encoches (voir ci-dessous) montre que

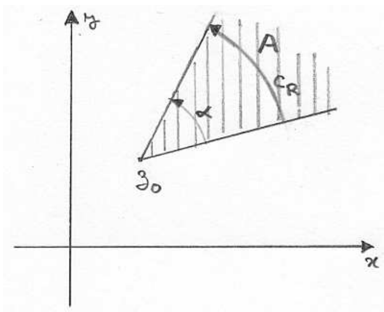
$$\lim_{\varepsilon_0 \longrightarrow 0^+} \int_{C(0,1/\varepsilon_0)} f(z)\, dz = i\pi\lambda_\infty$$

on voit que

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_J)\longrightarrow(0,\ldots,0)\\ \varepsilon_0>0,\ldots,\varepsilon_J>0}} \int_{-1/\varepsilon_0}^{x_1-\varepsilon_1} f(x)\, dx + \cdots + \int_{x_J+\varepsilon_J}^{1/\varepsilon_0} f(x)\, dx \\ = 2i\pi\left[\mathrm{Res}_{z_1} f + \cdots + \mathrm{Res}_{z_K} f\right] + i\pi\left[\lambda_1 + \cdots + \lambda_J - \lambda_\infty\right]\end{aligned}$$

et la conclusion en résulte. □

Lemme 2.16.10 (Grandes encoches)**.** *Soit A un angle plein fermé de sommet z_0 et d'ouverture α et soit C_R l'arc de cercle de centre z_0 et de rayon R intercepté par A.*



Supposons que $f(z)$ soit continu dans A et que

$$\lim_{\substack{z\longrightarrow\infty\\ z\in A}} (z - z_0)f(z) = \lambda.$$

Alors,

$$\lim_{R\longrightarrow\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = i\alpha\lambda.$$

Démonstration. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_{C_R} f(z)\, dz = \int_{\theta}^{\theta+\alpha} f(z_0 + Re^{it})Rie^{it}\, dt.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{C_R} f(z)\, dz - i\alpha\lambda = \int_{\theta}^{\theta+\alpha} \left[f(z_0 + Re^{it})iRe^{it} - i\lambda\right]\, dt.$$

Or, sur C_R, on a $z = z_0 + Re^{it}$ avec t entre θ et $\theta + \alpha$ et par conséquent

$$(z - z_0)f(z) = f(z_0 + Re^{it})Re^{it}.$$

Par conséquent,

$$\left|\int_{C_R} f(z)\, dz - i\alpha\lambda\right| \leq \sup_{z\in C_R} |(z - z_0)f(z) - \lambda|\alpha.$$

La conclusion en résulte aussitôt. □

Lemme 2.16.11 (Petites encoches)**.** *Plaçons nous dans les mêmes conditions que dans le lemme des grandes encoches, mais supposons que $f(z)$ soit continu dans A et que*

$$\lim_{\substack{z\longrightarrow z_0\\ z\in A}} (z - z_0)f(z) = \lambda.$$

Alors,

$$\lim_{R\longrightarrow 0} \int_{C_R} f(z)\, dz = i\lambda\alpha.$$

Démonstration. Il suffit de procéder comme pour le lemme des grandes encoches. □

Exemples 2.16.12. Vu ce qui précède, il est clair que

$$\begin{aligned}
\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-c)} &= 2i\pi \operatorname{Res}_c \left[\frac{1}{z(z-c)}\right] + i\pi \left[\lim_{\substack{z\longrightarrow 0\\ \Im z\geq 0}} \frac{1}{z-c} - \lim_{\substack{z\longrightarrow \infty\\ \Im z\geq 0}} \frac{1}{z-c}\right]\\
&= 2i\pi\frac{1}{c} + i\pi\frac{-1}{c}\\
&= \frac{i\pi}{c}
\end{aligned}$$

si $\Im c > 0$, que

$$\begin{aligned}
\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-c)} &= i\pi \left[\lim_{\substack{z\longrightarrow 0\\ \Im z\geq 0}} \frac{1}{z-c} - \lim_{\substack{z\longrightarrow \infty\\ \Im z\geq 0}} \frac{1}{z-c}\right]\\
&= -\frac{i\pi}{c}
\end{aligned}$$

si $\Im c < 0$ et que

$$\begin{aligned}\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-c)} &= i\pi \left[\lim_{\substack{z \longrightarrow 0 \\ \Im z \geq 0}} \frac{1}{z-c} + \lim_{\substack{z \longrightarrow c \\ \Im z \geq 0}} \frac{1}{z} + \lim_{\substack{z \longrightarrow \infty \\ \Im z \geq 0}} \frac{1}{z-c} \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

si $\Im c = 0$ et $c \neq 0$. Remarquons également que si $c = 0$ alors

$$\begin{aligned}\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-c)} &= \lim_{\substack{(\varepsilon_0,\varepsilon_1) \longrightarrow (0,0) \\ \varepsilon_0 > 0, \varepsilon_1 > 0}} \int_{-1/\varepsilon_0}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \int_{\varepsilon_1}^{1/\varepsilon_0} \frac{dx}{x^2} \\ &= \lim_{\substack{(\varepsilon_0,\varepsilon_1) \longrightarrow (0,0) \\ \varepsilon_0 > 0, \varepsilon_1 > 0}} \left. \frac{-1}{x} \right|_{-1/\varepsilon_0}^{-\varepsilon_1} + \left. \frac{-1}{x} \right|_{\varepsilon_1}^{1/\varepsilon_0} \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Proposition 2.16.13 (Calcul d'intégrale de type IIIa)**.** *Soit H le demi-plan ouvert*

$$\{z : \Im z > 0\}$$

et soient $z_1, \ldots, z_J$ des points deux à deux distincts de H. Supposons que f soit défini et continu sur $\overline{H} \setminus \{z_1, \ldots, z_J\}$ et holomorphe sur $H \setminus \{z_1, \ldots, z_J\}$ et qu'il existe un $\alpha > 1$ pour lequel

$$f(z) = O(|z|^{-\alpha})$$

si $z \to \infty$ dans $\overline{H}$. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x)\, dx = 2i\pi \left[\operatorname{Res}_{z_1} \left(e^{i\xi z} f(z) \right) + \cdots + \operatorname{Res}_{z_J} \left(e^{i\xi z} f(z) \right) \right]$$

pour tout $\xi \geq 0$.

Démonstration. Cela résulte directement de la Proposition 2.16.3 puisque

$$|e^{i\xi z}| = e^{-\xi \Im z} \leq 1$$

si ξ et $\Im z$ sont positifs ou nuls. □

Exemple 2.16.14. Supposons que $\xi \geq 0$ et que $a > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{x^2 + a^2}\, dx &= 2i\pi \left[\operatorname{Res}_{ia} \frac{e^{i\xi z}}{z^2 + a^2} \right] \\ &= 2i\pi \frac{e^{-\xi a}}{2ia} \\ &= \frac{\pi}{a} e^{-\xi a}.\end{aligned}$$

En prenant le conjugué des deux membres, on voit que l'on a aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{a} e^{-\xi a}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{F}^{+}_{x\longrightarrow\xi}\left(\frac{1}{x^2 + a^2}\right) = \frac{\pi}{a} e^{-|\xi| a}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.16.15 (Valeurs principales d'intégrales de type IIIb)**.** *Soit H le demi-plan ouvert*

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\},$$

soient $x_1 < \cdots < x_J$ des réels et soient $z_1, \dots, z_K$ des points deux à deux distincts de H. Supposons que

(a) f soit défini et continu sur $\overline{H} \setminus \{x_1, \dots, x_J, z_1, \dots, z_K\}$;

(b) f soit holomorphe sur $H \setminus \{z_1, \dots, z_K\}$;

(c) la limite

$$\lambda_j = \lim_{\substack{z\longrightarrow x_j \\ z\in\overline{H}}} (z - x_j) f(z)$$

existe et soit finie ;

(d) on ait

$$\lim_{\substack{z\longrightarrow\infty \\ z\in\overline{H}}} f(z) = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x)\, dx = 2i\pi & \left[\operatorname{Res}_{z_1}(e^{i\xi z} f(z)) + \cdots + \operatorname{Res}_{z_K}(e^{i\xi z} f(z))\right] \\ & + i\pi \left[e^{i\xi x_1}\lambda_1 + \cdots + e^{i\xi x_J}\lambda_J\right] \end{aligned}$$

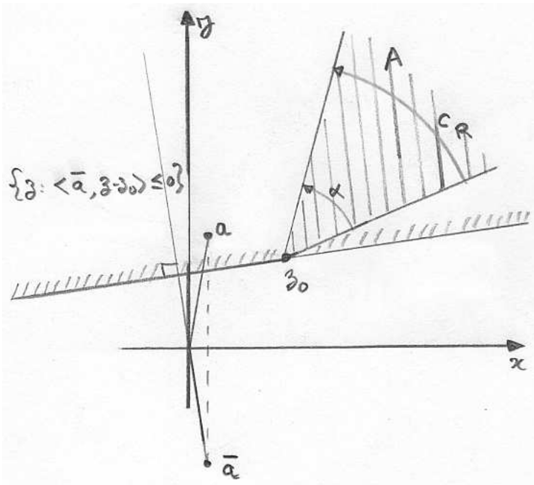
si $\xi > 0$.

Démonstration. Il suffit de procéder comme pour la preuve de la Proposition 2.16.9 en remplaçant le lemme des grandes encoches par le lemme de Jordan ci-dessous. □

Lemme 2.16.16 (Jordan)**.** *Soit A un angle plein fermé de sommet z_0 et d'ouverture α inclus dans le demi-plan*

$$\{z : \langle \overline{a}, (z - z_0)\rangle \leq 0\}.$$

Notons C_R l'arc de cercle de centre z_0 et de rayon R intercepté par A.



Supposons que $f(z)$ soit continu sur A et que

$$\lim_{\substack{z\longrightarrow\infty\\ z\in A}} f(z) = 0.$$

Alors,

$$\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_{C_R} e^{az} f(z)\,dz = 0.$$

Démonstration. Par translation et rotation, on se ramène directement au cas où $a = i\xi$ $(\xi > 0)$, où $z_0 = 0$ et où l'angle A est situé dans le demi-plan fermé

$$\overline{H} = \{z : \Im z \geq 0\}.$$

Dans ce cas,

$$\int_{C_R} e^{az} f(z)\,dz = \int_{\theta_0}^{\theta_1} e^{i\xi Re^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta}\,d\theta$$

avec $[\theta_0, \theta_1] \subset [0, \pi]$. Il s'ensuit que

$$\left|\int_{C_R} e^{az} f(z)\,dz\right| \leq R\left[\int_0^{\pi} e^{-\xi R\sin\theta}\,d\theta\right]\sup_{z\in C_R}|f(z)|.$$

Or

$$\int_0^{\pi} e^{-\xi R\sin\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-\xi R\sin\theta}\,d\theta$$

et comme $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ sur $[0,\pi/2]$, on voit que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{-\xi R\sin\theta}\,d\theta &\leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-2\xi R\theta/\pi}\,d\theta\\ &\leq 2\,\frac{e^{-2\xi R\theta/\pi}}{-2\xi R/\pi}\bigg|_0^{\pi/2}\\ &\leq \pi\frac{1-e^{-\xi R}}{\xi R}\\ &\leq \frac{\pi}{\xi R}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left|\int_{C_R} e^{az}f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi}{\xi}\sup_{z\in C_R}|f(z)|$$

et la conclusion est immédiate. □

Exemple 2.16.17.

(a) A titre d'exemple d'utilisation de la proposition précédente, calculons

$$I = \int_0^{\rightarrow\infty}\frac{x\sin\xi x}{x^2+a^2}\,dx \qquad (a>0,\lambda>0).$$

On a

$$I = \frac{1}{2}\Im J$$

où

$$J = \mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\xi x}}{x^2+a^2}\,dx.$$

Or, d'après ce qui précède,

$$J = 2i\pi\,\mathrm{Res}_{ia}\left(\frac{ze^{i\xi z}}{z^2+a^2}\right) = 2i\pi\frac{iae^{-\xi a}}{2ia}.$$

Donc,

$$I = \frac{\pi}{2}e^{-\lambda a}.$$

(b) Calculons à présent l'intégrale fléchée

$$I = \int_0^{\rightarrow\infty}\frac{\sin\xi x}{x}\,dx \qquad (\xi>0).$$

Bien sûr, on a $2I = \Im J$ si

$$J = \mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{\rightarrow\infty} e^{i\xi x}\frac{1}{x}\,dx \qquad (\xi>0).$$

La proposition précédente montre alors que

$$J = i\pi \operatorname{Res}_0 \frac{1}{z}$$

et par conséquent que

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Proposition 2.16.18 (Valeurs principales d'intégrales de type IVa)**.** *Soit a un réel, soient $z_1, \ldots, z_K$ des complexes deux à deux distincts de $\mathbb{C} \setminus [a, +\infty[$ et soient $x_1 < \cdots < x_J$ des réels de $]a, +\infty[$. Supposons que f soit holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus ([a, +\infty[\cup \{z_1, \ldots, z_K\})$ et que*

(i) les limites

$$\lambda_a = \lim_{\substack{z \longrightarrow a \\ z \notin [a,+\infty[}} (z-a)f(z) \qquad \text{et} \qquad \lambda_\infty = \lim_{\substack{z \longrightarrow \infty \\ z \notin [a,+\infty[}} zf(z)$$

existent et sont finies ;

(ii) les limites

$$\lambda_{j+} = \lim_{\substack{z \longrightarrow x_j \\ \Im z > 0}} (z - x_j)f(z) \qquad \text{et} \qquad \lambda_{j-} = \lim_{\substack{z \longrightarrow x_j \\ \Im z < 0}} (z - x_j)f(z)$$

existent et sont finies pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$;

(iii) les limites

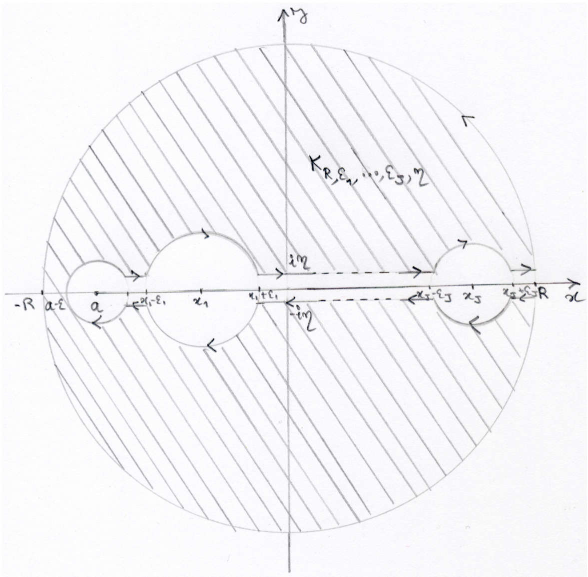
$$f_\pm(x) = \lim_{\eta \longrightarrow 0^\pm} f(x + i\eta)$$

existent uniformément en x sur tout compact de $]a, +\infty[\setminus \{x_1, \ldots, x_J\}$.

Alors

$$\begin{aligned} \text{v. p.} \int_a^{+\infty} (f_+(x) - f_-(x))\, dx = 2i\pi \left[\operatorname{Res}_{z_1} f + \cdots + \operatorname{Res}_{z_K} f\right] + 2i\pi(\lambda_a - \lambda_\infty) \\ + i\pi[(\lambda_{1+} + \lambda_{1-}) + \cdots + (\lambda_{J+} + \lambda_{J-})] \end{aligned}$$

Démonstration. Considérons une courbe C du type



avec $R > 0$ suffisamment grand et $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0, \ldots, \varepsilon_J > 0$ suffisamment petits pour que les $z_1, \ldots, z_K$ se trouvent à l'intérieur du compact K délimité par C. Vu le théorème des résidus, on a alors

$$\int_C f(z)\, dz = 2i\pi \left[\mathrm{Res}_{z_1} f + \cdots + \mathrm{Res}_{z_K} f\right].$$

En passant à la limite pour $\eta \to 0^+$ dans cette égalité et en utilisant (iii), on en tire que

$$\begin{aligned}
&\int_{a+\varepsilon}^{x_1-\varepsilon_1} [f_+(x) - f_-(x)]\, dx \\
&\quad + \int_{x_1+\varepsilon_1}^{x_2-\varepsilon_2} [f_+(x) - f_-(x)]\, dx \\
&\quad + \cdots + \int_{x_J+\varepsilon_J}^{R} [f_+(x) - f_-(x)]\, dx \\
&\qquad = 2i\pi \left[\mathrm{Res}_{z_1} f + \cdots + \mathrm{Res}_{z_K} f\right] \\
&\qquad\quad + \int_{C(a,\varepsilon)} f(z)\, dz \\
&\qquad\quad + \int_{\Gamma_+(x_1,\varepsilon_1)} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_-(x_1,\varepsilon_1)} f(z)\, dz \\
&\qquad\quad + \cdots - \int_{C(0,R)} f(z)\, dz
\end{aligned}$$

où $C(a, \varepsilon)$ (resp. $C(0, R)$) est un cercle de centre a et de rayon ε (resp. de centre 0 et de rayon R) orienté trigonométriquement et où $\Gamma_+(x_j, \varepsilon_j)$ et $\Gamma_-(x_j, \varepsilon_j)$ désignent les demi-cercles

$$\{z : |z - x_j| = \varepsilon_j, \Im z \geq 0\} \qquad \text{et} \qquad \{z : |z - x_j| = \varepsilon_j, \Im z \leq 0\}$$

orientés de la même manière. La conclusion résulte alors de (i) et (ii) et des lemmes d'encoches. □

Pour tirer des applications intéressantes de la proposition précédente, il est utile de disposer d'un logarithme holomorphe sur le complémentaire d'une demi-droite quelconque partant de l'origine. Si la demi-droite en question est de la forme $\{-re^{i\theta_0} : r \geq 0\}$ alors on vérifie aisément que la fonction

$$z \mapsto \ln\left(ze^{-i\theta_0}\right) + i\theta_0$$

est un logarithme du type requis.

Définition 2.16.19. Nous conviendrons de noter $\ln_{\theta_0}(z)$ le logarithme considéré ci-dessus.

Remarque 2.16.20. (a) Vu la définition précédente, il est clair que $\ln_0(z)$ est le logarithme principal que nous avons considéré jusqu'à présent.

(b) Pour $\theta_0 = \pi$, nous obtenons un logarithme holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ et, puisque

$$\ln_\pi(z) = \ln(-z) + i\pi,$$

il est clair que

$$\lim_{\eta \longrightarrow 0^+} \ln_\pi(x + i\eta) = \ln x \qquad \text{et que} \qquad \lim_{\eta \longrightarrow 0^-} \ln_\pi(x + i\eta) = \ln x + 2i\pi$$

si $x > 0$.

Exemple 2.16.21. Appliquons le résultat précédent au cas où

$$f(z) = \frac{\ln_\pi z}{z^3 + a^3} \qquad (a > 0).$$

Vu le point (b) de la remarque précédente, il est clair que

$$f_+(x) = \frac{\ln x}{x^3 + a^3} \qquad \text{et que} \qquad f_-(x) = \frac{\ln x + 2i\pi}{x^3 + a^3}.$$

Il s'ensuit que

$$\text{v. p.} \int_0^{+\infty} \frac{-2i\pi}{x^3 + a^3}\, dx = 2i\pi \left[\operatorname{Res}_{ae^{-i\pi/3}} f + \operatorname{Res}_{ae^{i\pi/3}} f + \operatorname{Res}_{-a} f\right].$$

Or,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{ae^{-i\pi/3}} f &= \frac{\ln_\pi(ae^{-i\pi/3})}{3a^2e^{-2i\pi/3}} = \frac{\ln a + 5i\pi/3}{3a^2}e^{2i\pi/3}\\
\operatorname{Res}_{ae^{i\pi/3}} f &= \frac{\ln_\pi(ae^{i\pi/3})}{3a^2e^{2i\pi/3}} = \frac{\ln a + i\pi/3}{3a^2}e^{-2i\pi/3}\\
\operatorname{Res}_{-a} f &= \frac{\ln_\pi(-a)}{3a^2} = \frac{\ln a + i\pi}{3a^2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+a^3} &= -\left[\frac{\ln(a)+i\pi}{3a^2}(1+e^{2i\pi/3}+e^{-2i\pi/3}) + \frac{2i\pi}{9a^2}(e^{2i\pi/3}-e^{-2i\pi/3})\right]\\
&= \frac{4\pi}{9a^2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= \frac{2\pi\sqrt{3}}{9a^2}
\end{aligned}$$

D'autres applications de la Proposition 2.16.18 peuvent s'obtenir en généralisant la puissance complexe principale comme on l'a fait pour le logarithme principal.

Définition 2.16.22. Pour tout $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et tout $c \in \mathbb{C}$, nous conviendrons de poser

$$(z)^c_{\theta_0} = e^{c \ln_{\theta_0} z}.$$

Remarque 2.16.23. (a) Par construction, $(z)^c_0$ est la fonction « puissance c principale »que nous avons considérée jusqu'à présent.

(b) Si $\theta_0 = \pi$, alors la fonction

$$z \mapsto (z)^c_\pi$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ et on a

$$\lim_{\eta \longrightarrow 0^+} (x+i\eta)^c_\pi = x^c \qquad \text{et} \qquad \lim_{\eta \longrightarrow 0^-} (x+i\eta)^c_\pi = e^{2i\pi c}x^c$$

pour tout $x > 0$.

Exemple 2.16.24. Appliquons la Proposition 2.16.18 au cas où

$$f(z) = \frac{(z)^{a-1}_\pi}{z+1} \qquad (a \in \,]0,1[).$$

Vu le point (b) de la remarque précédente, on a

$$f_+(x) = \frac{x^{a-1}}{x+1} \qquad \text{et} \qquad f_-(x) = e^{2i\pi a}\frac{x^{a-1}}{x+1}.$$

Ainsi,

$$\left(1-e^{2i\pi a}\right)\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx = 2i\pi\,\mathrm{Res}_{-1} f.$$

Or

$$\mathrm{Res}_{-1} f = \lim_{z\longrightarrow -1}(z)_\pi^{a-1}$$

puisque -1 est un pôle simple de f. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Res}_{-1} f = e^{i\pi(a-1)} = -e^{i\pi a}$$

et que

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx = \frac{-2i\pi e^{i\pi a}}{1-e^{2i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Remarque 2.16.25. Rappelons que la fonction Γ d'Euler est définie pour $a>0$ par

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{a-1}\,du.$$

Il s'ensuit que

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{a-1}\,du\int_0^{+\infty} e^{-v}v^{-a}\,dv$$

si $a\in\,]0,1[$. Dans ce cas, on a aussi

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-(u+v)}u^{a-1}v^{-a}\,dudv$$

et le changement de variables

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & u/v \\ y & = & v \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u & = & xy \\ v & = & y \end{array}\right.$$

montre que

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(1-a) &= \int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-(x+1)y}x^{a-1}\,dxdy \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx.\end{aligned}$$

En tenant compte de l'exemple précédent, on voit alors que

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

pour tout $a \in \,]0,1[$. Vu le travail effectué dans les Exemples 2.7.7 et le principe d'unicité du prolongement holomorphe, on a en fait établi que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Cette très jolie formule est connue sous le nom de « formule des compléments »pour la fonction Γ. Elle montre en particulier que $\Gamma(z)$ n'a pas de zéro sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.

2.17 Sommation de séries par résidus

Dans la section précédente, nous avons vu que le théorème des résidus permettait de calculer de nombreuses intégrales. Nous allons à présent montrer qu'il permet aussi de sommer diverses séries.

Définition 2.17.1. Soit $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ une suite bilatère de nombres complexes. Nous dirons que la série bilatère correspondante

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m$$

possède une *valeur principale* si la limite

$$L = \lim_{M\longrightarrow+\infty} \sum_{m=-M}^{M} c_m$$

existe et est finie et nous poserons alors

$$\text{v. p.} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m = L.$$

Proposition 2.17.2. *Soient $z_1, \ldots, z_J$ des points deux à deux distincts de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \cup \{z_1, \ldots, z_J\})$. Supposons qu'il existe une suite $(R_M)_{M\geq 0}$ de réels tels que $M < R_M < M+1$ et pour laquelle*

$$\sup_{z\in C(0,R_M)} |zf(z)| \to 0$$

si $M \to +\infty$. Alors

$$\text{v. p.} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Res}_m f = -[\operatorname{Res}_{z_1} f + \cdots + \operatorname{Res}_{z_J} f].$$

Démonstration. Soit $M > \sup\{|z_1|, \dots, |z_J|\}$. En appliquant le théorème des résidus au disque $\overline{D(0, R_M)}$, on voit que

$$\int_{C(0,R_M)} f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{m=-M}^{M} \operatorname{Res}_m f + 2i\pi[\operatorname{Res}_{z_1} f + \cdots + \operatorname{Res}_{z_J} f].$$

La conclusion résulte alors du fait que la majoration

$$\left|\int_{C(0,R_M)} f(z)\,dz\right| \leq 2\pi \sup_{z \in C(0,R_M)} |zf(z)|$$

combinée avec nos hypothèses montre que

$$\int_{C(0,R_M)} f(z)\,dz \to 0$$

si $M \to +\infty$. □

Pour tirer des applications intéressantes du résultat précédent, il est utile d'introduire d'abord la notion de facteur sommatoire.

Définition 2.17.3. Un *facteur sommatoire* pour la suite bilatère complexe $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ est une fonction $\sigma(z)$ holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, qui possède une pôle simple de résidu c_m en chaque entier m et qui est bornée sur un ensemble de la forme

$$\bigcup_{M \geq 0} C(0, R_M)$$

où $M < R_M < M + 1$.

Cela étant, la proposition précédente admet le corollaire suivant :

Corollaire 2.17.4. *Soit σ un facteur sommatoire pour la suite bilatère complexe $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}}$, soient $z_1, \dots, z_J$ des points deux à deux distincts de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_J\}$ telle que*

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} zf(z) = 0.$$

Alors

$$\text{v. p.} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m f(m) = -[\operatorname{Res}_{z_1}(\sigma f) + \cdots + \operatorname{Res}_{z_J}(\sigma f)].$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la fonction σf et de remarquer que l'on a

$$\mathrm{Res}_m(\sigma f) = c_m f(m)$$

puisque

$$\lim_{z \longrightarrow m} (z-m)\sigma(z) f(z) = (\mathrm{Res}_m \sigma) f(m).$$

□

Exemple 2.17.5. La fonction

$$\sigma(z) = \pi \operatorname{cotg} \pi z$$

est un facteur sommatoire pour la suite bilatère $(1)_{m\in\mathbb{Z}}$. En effet, on sait déjà que la fonction $\sigma(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et que chaque $m \in \mathbb{Z}$ en est un pôle simple de résidu 1. De plus, on a

$$|\sigma(z)| = \left|\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}\right| \leq \frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|}$$

si $z = x + iy$ car

$$\cos \pi z = \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{2}, \qquad \sin \pi z = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}.$$

Comme

$$\lim_{y \longrightarrow \infty} \pi \frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|} = \pi,$$

on voit que

$$\sup_{|y|>Y} |\sigma(z)| < +\infty$$

pour tout $Y > 0$. La fonction $\sigma(z)$ étant continue sur le compact

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [-Y, Y] \setminus D(0, \frac{1}{4}),$$

elle y est bornée. Il s'ensuit que

$$\sup_{z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \mathbb{R} \setminus D(0, \frac{1}{4})} |\sigma(z)| < +\infty.$$

Comme $\sigma(z+1) = \sigma(z)$, on a donc

$$\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus \cup_{m\in\mathbb{Z}} D(m, 1/4)} |\sigma(z)| < +\infty.$$

Il s'ensuit que $\sigma(z)$ est borné sur

$$\bigcup_{M\geq 0} C(0, M+\frac{1}{2});$$

d'où la conclusion.

Exemple 2.17.6. Calculons à présent

$$S_{2k} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{2k}} \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

En appliquant la Proposition 2.17.2 à la fonction

$$\frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^{2k}},$$

on voit que

$$\text{v. p.} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Res}_m \left(\frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^{2k}} \right) = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{1}{m^{2k}} + \operatorname{Res}_0 \left(\frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^{2k}} \right) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{2k}} = 0$$

et que

$$S_{2k} = -\frac{1}{2} \operatorname{Res}_0 \left(\frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^{2k}} \right).$$

Comme

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n} B_n^*}{(2n)!} z^{2n-1},$$

on a donc

$$S_{2k} = \frac{1}{2} \frac{2^{2k} B_k^*}{(2k)!} \pi^{2k} = \frac{2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_k^*.$$

2.18 Extrema du module des fonctions holomorphes

Proposition 2.18.1 (Propriété de la moyenne)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. Si $R < d(z_0, \complement\Omega)$, alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dt.$$

En d'autres termes, la valeur de f en z_0 est la moyenne des valeurs de f sur le cercle de centre z_0 et de rayon R.

Démonstration. Cela découle immédiatement de la formule de représentation de Cauchy. □

Proposition 2.18.2. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. Supposons que $|f|$ possède un maximum en un point z_0 de Ω. Alors, f est constant sur Ω.*

Démonstration. Si $|f(z_0)| = 0$ alors f est identiquement nul sur Ω et la conclusion est immédiate. Sinon, il suffit de montrer que $|f|$ est constant sur Ω car alors f ne s'annule pas sur Ω et $\overline{f} = |f|^2/f$ est aussi holomorphe sur Ω. Posons

$$M = \sup_{z\in\Omega} |f(z)| \qquad \text{et} \qquad F = \{z \in \Omega : |f(z)| = M\}.$$

et supposons que $M > 0$. Par construction, F est un fermé non vide de Ω. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer qu'il est aussi ouvert. Soit $z_1 \in F$ et soit C un cercle de centre z_1 et de rayon $r > 0$ inclus dans Ω. Supposons qu'il existe $z_2 \in C$ tel que

$$|f(z_2)| < M.$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_2 = z_1 + re^{i\theta}$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$|f(z_1 + re^{i(\theta+t)})| < M$$

si $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. On a alors

$$\begin{aligned}
M = |f(z_1)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(z_1 + re^{i(\theta+t)})|\, dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\Bigg(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} |f(z_1 + re^{i(\theta+t)})|\, dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(z_1 + re^{i(\theta+t)})|\, dt \\
&\qquad + \int_{\varepsilon}^{\pi} |f(z_1 + re^{i(\theta+t)})|\, dt\Bigg) \\
&< \frac{1}{2\pi}\left(M(-\varepsilon+\pi) + 2\varepsilon M + (\pi-\varepsilon)M\right) < M,
\end{aligned}$$

d'où une contradiction. Il s'ensuit que $C \subset F$. Comme r peut être choisi arbitrairement dans $\left]0, d(z_1, \complement\Omega)\right[$, on a en fait montré que

$$D(z_1, d(z_1, \complement\Omega)) \subset F.$$

La conclusion en résulte. □

Corollaire 2.18.3. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. Supposons que $|f|$ possède un minimum non nul en un point z_0 de Ω. Alors, f est constant sur Ω.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le résultat précédent pour $1/f$. □

Proposition 2.18.4 (Principe du maximum du module)**.** *Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. Alors,*

$$\sup_{\overline{\Omega}} |f| = \sup_{\dot{\Omega}} |f|.$$

Démonstration. Comme $|f|$ est continu sur $\overline{\Omega}$, on sait qu'il existe $z_0 \in \overline{\Omega}$ tel que

$$|f(z_0)| = \sup_{\overline{\Omega}} |f|.$$

Si $z_0 \in \dot{\Omega}$, il n'y a rien à démontrer. Si $z_0 \in \Omega$, il résulte de la Proposition 2.18.2 que f est constant sur Ω et par conséquent sur $\overline{\Omega}$. Il s'ensuit que

$$|f(z)| = |f(z_0)|$$

sur $\overline{\Omega}$ et comme $\dot{\Omega} \neq \emptyset$, la conclusion en résulte. □

A titre d'exemple d'utilisation de ce résultat, démontrons le résultat suivant :

Lemme 2.18.5 (Schwarz)**.** *Soit $f : D(0,1) \to D(0,1)$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$ et soit $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$. Alors, on a*

(i) $|f'(0)| \leq 1$;

(ii) $|f(z_0)| \leq |z_0|$.

De plus, (i) (resp. (ii)) devient une égalité si et seulement si f est une rotation de centre 0.

Démonstration. Comme $f(0) = 0$, la fonction

$$f(z)/z : D(0,1) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

possède une unique extension holomorphe $g(z)$ à $D(0,1)$. Pour tout $R < 1$, le principe du maximum du module montre que

$$\sup_{z \in \overline{D(0,R)}} |g(z)| = \sup_{z \in C(0,R)} |g(z)| \leq \frac{1}{R}.$$

On en tire que

$$|g(z)| \leq 1/R$$

pour tout $z \in \overline{D(0,R)}$. En faisant tendre R vers 1 par valeurs inférieures on voit en fait que

$$|g(z)| \leq 1$$

pour tout $z \in D(0,1)$. Comme

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{si } z \in D(0,1) \setminus \{0\} \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

on en déduit aussitôt que $|f(z_0)| \leq |z_0|$ et que $|f'(0)| \leq 1$. Ainsi (i) et (ii) sont établis.

Supposons à présent que (i) ou (ii) soit une égalité. Vu ce qui précède la fonction $|g|$ atteint alors sa valeur maximum 1 en un point de $D(0,1)$ et le principe du maximum du module entraîne que $g(z)$ est constant sur $D(0,1)$. Il s'ensuit que

$$f(z) = cz$$

avec $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| = 1$ et la conclusion en résulte. □

Corollaire 2.18.6. *Les seules bijections biholomorphes de* $D(0,1)$ *sur* $D(0,1)$ *laissant l'origine fixe sont les rotations de centre* 0.

Démonstration. Soit $f : D(0,1) \to D(0,1)$ une bijection biholomorphe telle que $f(0) = 0$. Vu le lemme précédent, on a

$$|f(z)| \leq |z|$$

pour tout $z \in D(0,1)$. Pour la même raison on a aussi

$$|f^{-1}(z)| \leq |z|$$

pour tout $z \in D(0,1)$. Il s'ensuit que

$$|f(z)| = |z|$$

sur $D(0,1)$ et le lemme précédent montre que

$$f(z) = cz$$

avec $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| = 1$. □

Table des matières