UNIVERSITÉ de Liège

Analyse III (1^{re} Partie)

Notes du cours de la troisième année de bachelier en sciences mathématiques

Jean-Pierre Schneiders

Année 2007-2008

1 Systèmes d'équations de classe C_k ($k \geq 1$)

1.1 Introduction

Notre but principal dans ce chapitre est l'étude des systèmes d'équations du type

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{cases}$$

où $f_1, \ldots, f_m$ sont des fonctions réelles de classe C_k ($k \geq 1$) sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Le cas d'une équation à une inconnue ayant déjà été traité dans d'autres cours, nous commencerons par discuter le cas d'une équation à deux inconnues puis nous étendrons les résultats obtenus au cas général.

1.2 Étude d'une équation à deux inconnues

Pour nous faire une idée du problème, considérons d'abord quelques exemples

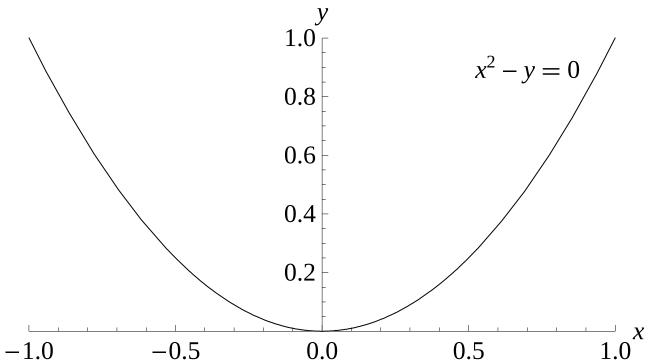
(a) Posons

$$f(x, y) = x^2 - y$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dans ce cas,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$$

peut se représenter par :



(b) Posons

$$f(x, y) = x^2 - y^3.$$

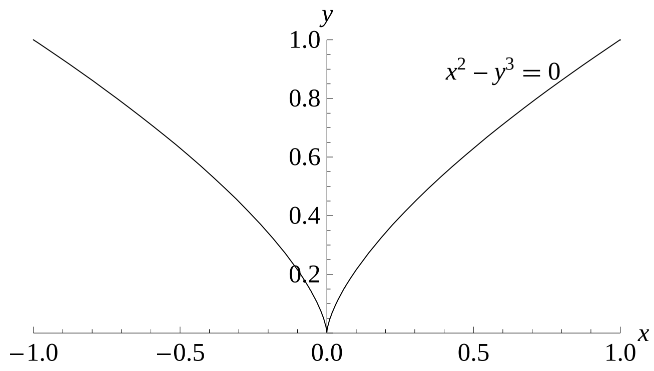
Dans ce cas,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(x, \sqrt[3]{x^2}) : x \in \mathbb{R}\}$$

est le graphe de la fonction

$$x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$$

et peut se représenter par :



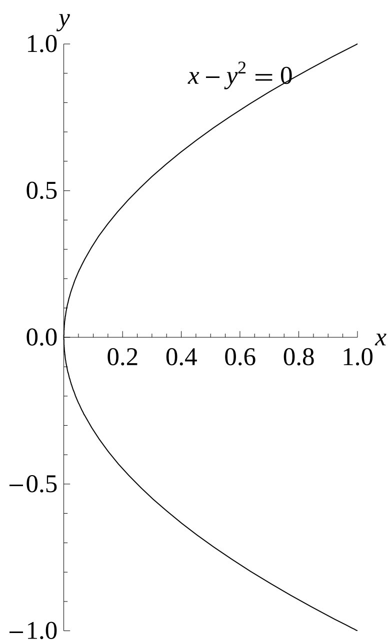
(c) Posons

$$f(x, y) = x - y^2$$

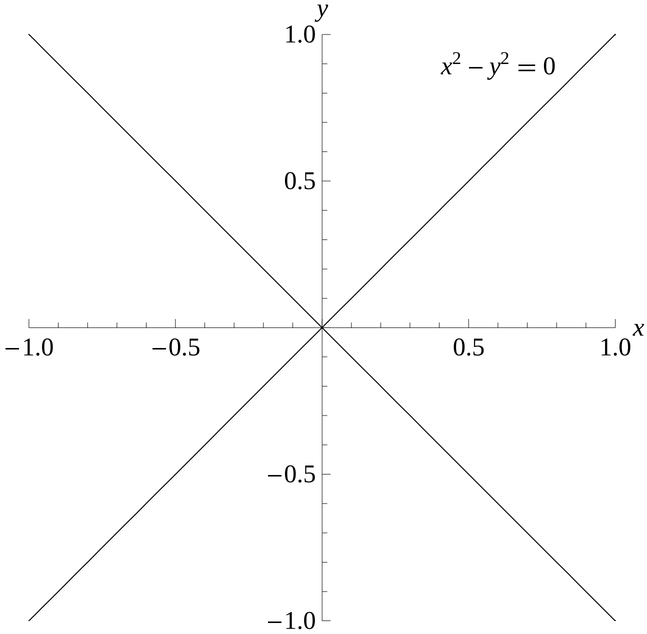
pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dans ce cas,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(y^2, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

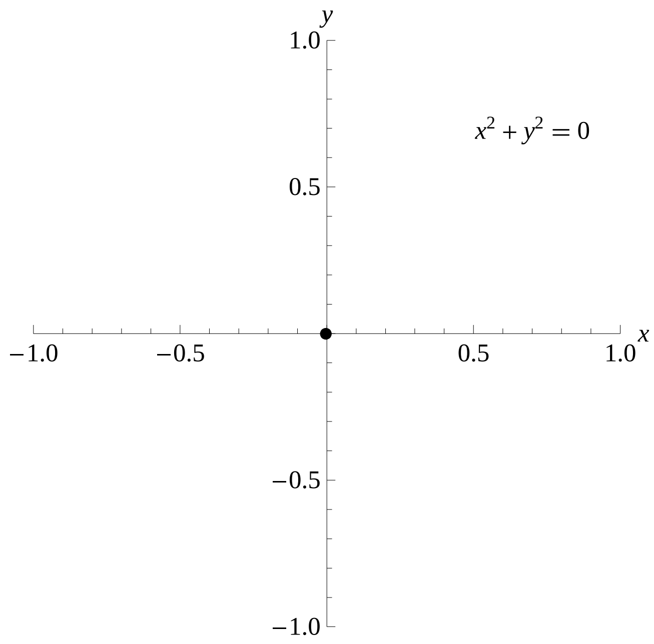
et peut se représenter par :



(d) Posons
$$f(x,y) = x^2 - y^2$$
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dans ce cas,
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\} = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$$
et peut se représenter par :



(e) Posons
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dans ce cas,
$$\{(x,y) : f(x,y) = 0\} = \{(0,0)\}$$
et peut se représenter par :



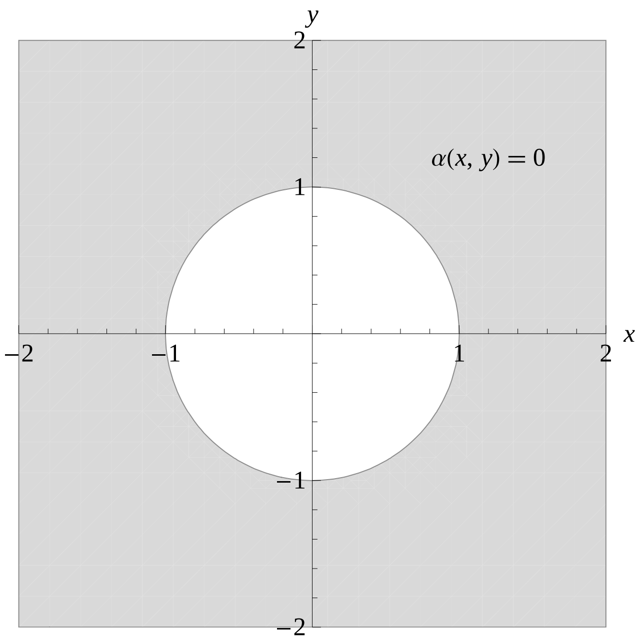
(f) Posons

$$f(x,y) = \alpha(x,y) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2-y^2)} & \text{si } x^2+y^2<1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 1\}$$

et peut se représenter par :



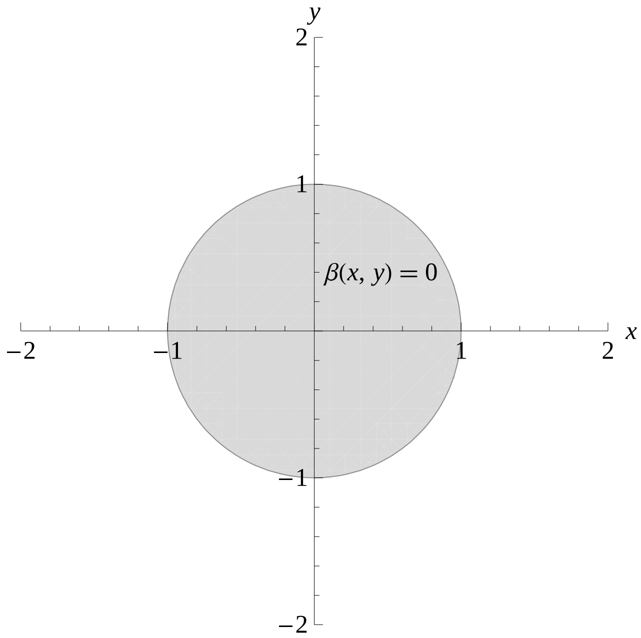
(g) Posons

$$f(x,y) = \beta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \alpha\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

et peut se représenter par :



Ces quelques exemples montrent que l'ensemble des solutions d'une équation du type

$$f(x,y) = 0$$

peut prendre des formes très variées même lorsque f est de classe C_∞ sur $\mathbb{R}^2$. On ne peut donc espérer en général un résultat aussi simple que pour les équations affines puisque dans ce cas,

$$f(x,y) = ax + by - c$$

et

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$$

est toujours une droite affine de $\mathbb{R}^2$ lorsque f n'est pas constant. Cependant, puisque f admet une approximation affine en chacun des points de son domaine de différentiabilité Ω, il est naturel d'espérer que l'étude locale de

$$\{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = 0\}$$

au voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ pour lequel $d_{(x_0,y_0)}f \neq 0$ soit assez facile. Cela s'avère être réellement le cas comme le montre le résultat suivant :

Proposition 1.2.1. *Soit f une fonction de classe C_1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et soit (x_0, y_0) un point de Ω tel que $f(x_0, y_0) = 0$. Supposons que*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Alors il existe un voisinage produit $U \times V$ de (x_0, y_0) dans Ω sur lequel

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

ne s'annule pas et pour lequel il existe une unique fonction $\varphi : U \to V$ telle que

$$\{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\}.$$

De plus, φ est de classe C_1 sur U et on a

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) / \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))$$

pour tout $x \in U$.

Démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0.$$

Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

est continu sur Ω, il existe $\eta_0 > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ pour lesquels

$$[x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0] \times [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0]$$

est une partie de Ω sur laquelle

$$\frac{\partial f}{\partial y} > 0.$$

Il en résulte que $f(x, y)$ est strictement croissant en y pour tout $x \in [x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0]$. Comme $f(x_0, y_0) = 0$, on en tire que

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0 \qquad \text{et que} \qquad f(x_0, y_0 + \varepsilon_0) > 0.$$

En utilisant la continuité de $f(x, y_0 - \varepsilon_0)$ et $f(x, y_0 + \varepsilon_0)$ en x, on voit que, quitte à diminuer η_0, on peut supposer que

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0 \qquad \text{et que} \qquad f(x_0, y_0 + \varepsilon_0) > 0$$

pour tout $x \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on voit alors aisément que l'équation

$$f(x, y) = 0$$

possède une et une seule solution y dans $]y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0[$ pour tout x fixé dans $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$. Il s'ensuit qu'il existe une unique fonction

$$\varphi :]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[\to]y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0[$$

pour laquelle

$$\begin{aligned}\{(x, y) \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[\times]y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0[: f(x, y) = 0\}\\ = \{(x, \varphi(x)) : x \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[\}\end{aligned}$$

et la première partie du résultat est établie.

Montrons maintenant que φ est continu sur $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$. Pour cela, fixons $x_1 \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$ et posons $y_1 = \varphi(x_1)$. Fixons également $\varepsilon_1 > 0$ tel que

$$[y_1 - \varepsilon_1, y_1 + \varepsilon_1] \subset [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0] .$$

En remplaçant x_0 par x_1 et ε_0 par ε_1 dans le raisonnement précédent, on voit directement qu'il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$]x_1 - \eta_1, x_1 + \eta_1[\subset]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[.$$

et pour lequel

$$\varphi(]x_1 - \eta_1, x_1 + \eta_1[) \subset]y_1 - \varepsilon_1, y_1 + \varepsilon_1[.$$

Cela suffit pour établir la continuité de φ en x_1.

Pour établir que φ est dérivable sur $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$, fixons de nouveau $x_1 \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$ et posons de nouveau $y_1 = \varphi(x_1)$. Comme f est de classe C_1 sur Ω, le théorème des accroissements finis nous dit que pour tout (x, y) suffisamment voisin de (x_1, y_1), il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned}f(x, y) = f(x_1, y_1) + (x - x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1 + \theta(x - x_1), y_1 + \theta(y - y_1))\\ + (y - y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_1 + \theta(x - x_1), y_1 + \theta(y - y_1)).\end{aligned}$$

On en tire que pour x suffisamment voisin de x_1, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned}0 = (x - x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1 + \theta(x - x_1), \varphi(x_1) + \theta(\varphi(x) - \varphi(x_1)))\\ + (\varphi(x) - \varphi(x_1))\frac{\partial f}{\partial y}(x_1 + \theta(x - x_1), \varphi(x_1) + \theta(\varphi(x) - \varphi(x_1))).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1}=\frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_1+\theta(x-x_1),\varphi(x_1)+\theta(\varphi(x)-\varphi(x_1)))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_1+\theta(x-x_1),\varphi(x_1)+\theta(\varphi(x)-\varphi(x_1)))}.$$

Comme $\varphi(x) \to \varphi(x_1)$ si $x \to x_1$, on en tire que

$$\varphi'(x_1)=\frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_1,\varphi(x_1))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_1,\varphi(x_1))}.$$

Pour conclure, il suffit alors de tenir compte de la continuité des fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}\qquad \text{et}\qquad \varphi$$

et du fait que

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

ne s'annule pas sur $]x_0-\eta_0,x_0+\eta_0[\times]y_0-\varepsilon_0,y_0+\varepsilon_0[$. □

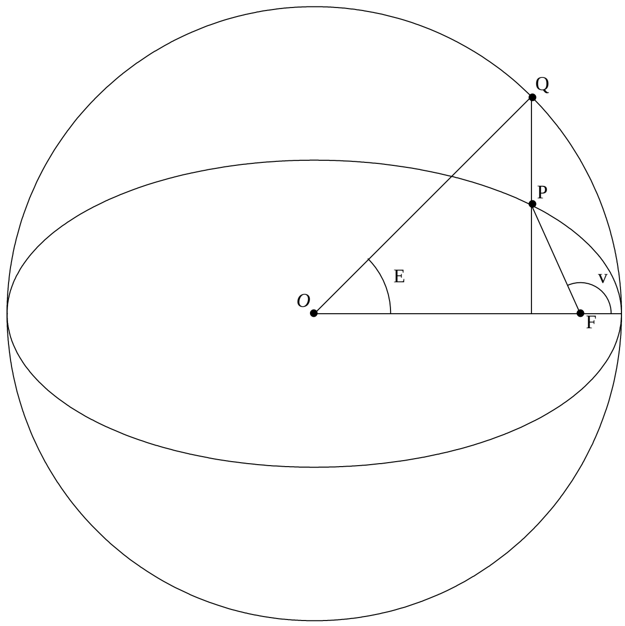
Exemple 1.2.2. Considérons le mouvement d'une planète autour du soleil et négligeons les interactions des autres planètes. L'orbite est alors une ellipse d'excentricité $e \in [0,1[$. La mécanique céleste nous apprend de plus que le mouvement de notre planète est régi par l'équation de Kepler

$$E - e\sin E = M.$$

Rappelons que dans cette relation, M désigne l'anomalie moyenne donnée par la formule

$$M=\frac{2\pi(t-t_0)}{T}$$

où t_0 est le temps de passage au périhélie et où T est la période du mouvement planétaire encore appelée année tropique. Quant à la grandeur E, il s'agit de l'anomalie excentrique dont la définition est clarifiée par la figure ci-dessous :



Fixons $e \in \left]-1, 1\right[$ et $M \in \mathbb{R}$. Puisque

$$\frac{\partial(E - e\sin E)}{\partial E} = 1 - e\cos E > 0$$

il est clair que la fonction

$$E \mapsto E - e\sin E$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, comme la fonction sinus varie dans $[-1, 1]$, on a aussi

$$\lim_{E \longrightarrow \pm\infty} (E - e\sin E) = \pm\infty.$$

Il s'ensuit qu'il existe un et un seul $E(e, M)$ tel que

$$E(e, M) - e\sin E(e, M) = M.$$

Étudions à présent la dépendance de $E(e, M)$ en e. Fixons donc $M \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction

$$e \mapsto E(e, M).$$

Vu ce qui précède, cette fonction est définie implicitement par l'équation

$$E - e\sin E - M = 0$$

et comme la dérivée partielle par rapport à E de cette équation est toujours non nulle, on peut déduire de la proposition précédente que $E(e, M)$ est de classe C_1 en e sur $\left]-1, 1\right[$ et que

$$\frac{\partial E(e, M)}{\partial e} = \frac{\sin E(e, M)}{1 - e\cos E(e, M)}.$$

Il s'ensuit que $E(e, M)$ est en fait de classe C_2 en e sur $]-1,1[$ et que

$$\frac{\partial^2 E}{\partial e^2} = \frac{(1 - \cos E \cos E \dfrac{\partial E}{\partial e} - \sin E(-\cos E + e \sin E \dfrac{\partial E}{\partial e})}{(1 - e\cos E)^2}.$$

En continuant de la sorte, on voit aisément que $E(e, M)$ est de classe C_∞ en e sur $]-1,1[$ et on obtient des relations permettant de calculer

$$\frac{\partial^k E(e, M)}{\partial e^k}$$

à partir de

$$E(e, M), \quad \frac{\partial E(e, M)}{\partial e}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial^{k-1} E(e, M)}{\partial e^{k-1}}.$$

En particulier, on peut obtenir le développement de Taylor de $E(e, M)$ en 0. Par exemple, en prenant $e = 0$ dans les formules ci-dessus on voit que

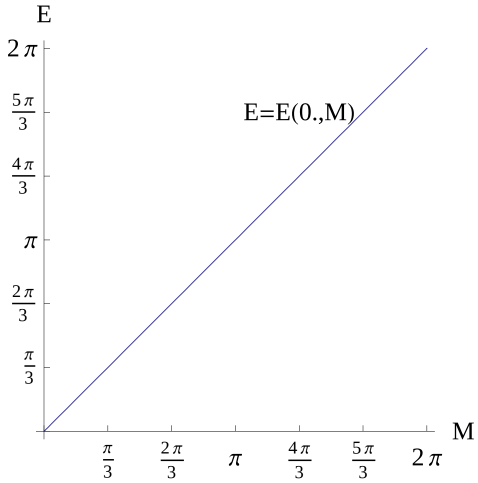
$$\begin{aligned} E(0, M) &= M \\ \frac{\partial E}{\partial e}(0, M) &= \sin M \\ \frac{\partial^2 E}{\partial e^2}(0, M) &= \sin 2M. \end{aligned}$$

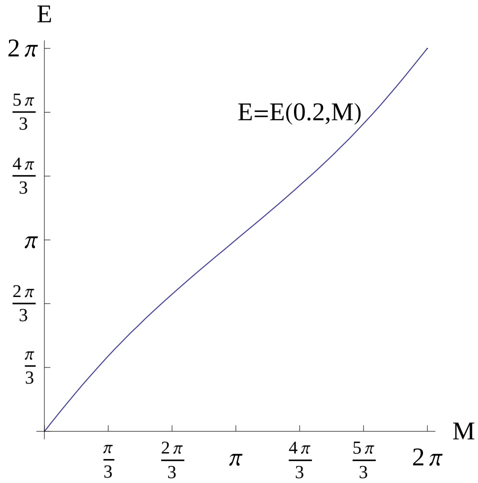
Ainsi,

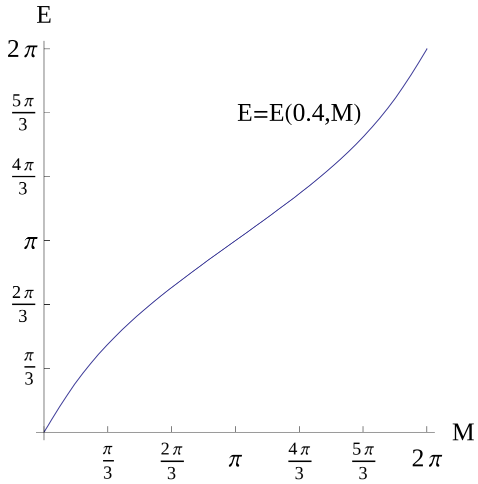
$$E(e, M) = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + o(e^2)$$

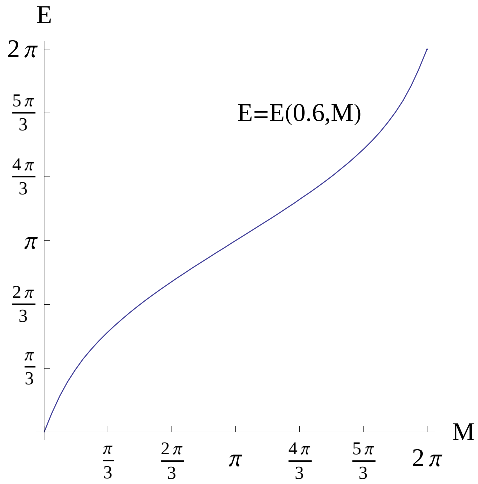
pour $M \in \mathbb{R}$ fixé et $e \to 0$.

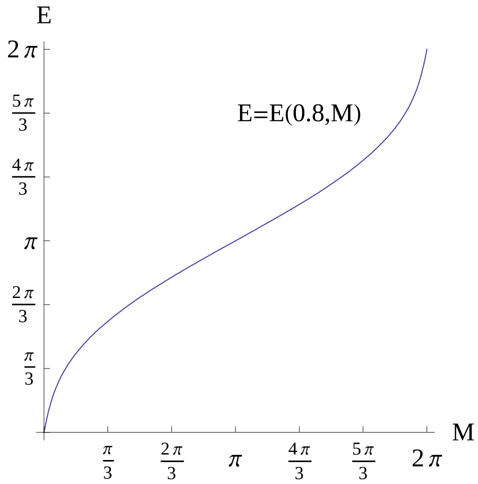
Pour terminer, on trouvera, ci-dessous, les graphes de la fonction $M \mapsto E(e, M)$ pour quelques valeurs de e.

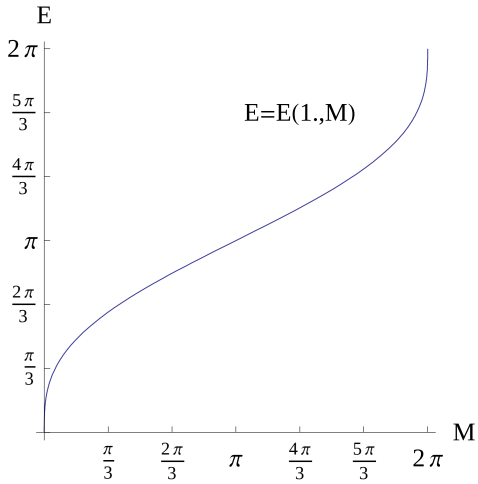

E
2π
5π/3
4π/3
π
2π/3
π/3
E=E(0.,M)
M
π/3
2π/3
π
4π/3
5π/3
2π


E
2π
5π/3
4π/3
π
2π/3
π/3
E=E(0.2,M)
M
π/3
2π/3
π
4π/3
5π/3
2π


E
2π
5π/3
4π/3
π
2π/3
π/3
E=E(0.4,M)
M
π/3
2π/3
π
4π/3
5π/3
2π


E
2π
5π/3
4π/3
π
2π/3
π/3
E=E(0.6,M)
M
π/3
2π/3
π
4π/3
5π/3
2π


E
2π
5π/3
4π/3
π
2π/3
π/3
E=E(0.8,M)
M
π/3
2π/3
π
4π/3
5π/3
2π


E
2π
5π/3
4π/3
π
2π/3
π/3
E=E(1.,M)
M
π/3
2π/3
π
4π/3
5π/3
2π

1.3 Étude d'un système d'équations indépendantes à plusieurs inconnues

Le résultat obtenu ci-dessus pour une équation à deux inconnues peut se généraliser au cas de plusieurs équations à plusieurs inconnues. Il prend alors la forme suivante :

Proposition 1.3.1 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soient $p, q \in \mathbb{N}_0$ et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{p+q}$. Écrivons les points de Ω sous la forme (x, y) avec $x \in \mathbb{R}^p$ et $y \in \mathbb{R}^q$ et notons (x_0, y_0) l'un d'entre eux. Supposons que*

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^q$$

sont de classe C_1 et que

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \neq 0$$

en (x_0, y_0). Alors il existe un voisinage produit ouvert $U \times V$ de (x_0, y_0) dans Ω sur lequel

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

ne s'annule pas et pour lequel il existe une unique application

$$\varphi : U \to V$$

telle que

$$\{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\}.$$

De plus, cette application φ est de classe C_1 sur U et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right]^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) \right]$$

pour tout $x \in U$.

Démonstration. Posons

$$g(x, y) = y - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)^{-1} f(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in \Omega$. Vu la définition de g, il est clair que l'on a

$$f(x, y) = 0$$

pour un $(x, y) \in \Omega$ si et seulement si

$$y = g(x, y)$$

i.e. si et seulement si y est un point fixe de l'application

$$y \mapsto g(x, y).$$

Comme on espère qu'une solution de

$$f(x, y) = 0$$

pour x fixé voisin de x_0 sera voisine de y_0, il est naturel d'espérer qu'une telle solution sera la limite de la suite définie par la relation de récurrence

$$y_{n+1} = g(x, y_n).$$

Pour établir que les choses se passent bien ainsi, remarquons d'abord que $g(x, y)$ est de classe C_1 et que puisque

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = I - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

on a aussi

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Cela étant, pour tout $\mu \in]0, 1[$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\eta_0 > 0$ tels que

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial y} \right\| \leq \mu$$

sur $\overline{B(x_0, \eta_0)} \times \overline{B(y_0, \varepsilon_0)}$. De la relation

$$g(x, y_2) - g(x, y_1) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial y}(x, y_1 + t(y_2 - y_1))(y_2 - y_1)\, dt$$

on tire alors que

$$|g(x, y_2) - g(x, y_1)| \leq \mu |y_2 - y_1| \tag{*}$$

pour tout $x \in \overline{B(x_0, \eta_0)}$ et tout $y_1, y_2 \in \overline{B(y_0, \varepsilon_0)}$. Puisque g est continu sur Ω et que $g(x_0, y_0) = y_0$, quitte à diminuer η_0 on peut aussi supposer que

$$g(x, y_0) \in \overline{B(y_0, (1 - \mu)\varepsilon_0)}$$

pour tout $x \in \overline{B(x_0, \eta_0)}$. De la relation

$$g(x, y) - g(x_0, y_0) = g(x, y) - g(x, y_0) + g(x, y_0) - g(x_0, y_0)$$

on tire que

$$|g(x, y) - y_0| \leq \mu |y - y_0| + (1 - \mu)\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0$$

si $x \in \overline{B(x_0, \eta_0)}$ et $y \in \overline{B(y_0, \varepsilon_0)}$. Il s'ensuit que l'application

$$y \mapsto g(x, y)$$

est une application strictement contractante de $\overline{B(y_0, \varepsilon_0)}$ dans $\overline{B(y_0, \varepsilon_0)}$ pour tout x fixé dans $\overline{B(x_0, \eta_0)}$. Pour tout x fixé dans $\overline{B(x_0, \eta_0)}$, la suite définie par la relation de récurrence

$$y_{m+1} = g(x, y_m) \qquad (m \geq 0)$$

converge donc bien vers l'unique point fixe de l'application

$$y \mapsto g(x, y)$$

dans $\overline{B(y_0, \varepsilon_0)}$. Notons $\varphi(x)$ ce point fixe. Par construction, il est clair que

$$\varphi\left(\overline{B(x_0, \eta_0)}\right) \subset \overline{B(y_0, \varepsilon_0)}$$

et que $f(x, y) = 0$ pour un $x \in \overline{B(x_0, \eta_0)}$ et un $y \in \overline{B(y_0, \varepsilon_0)}$ si et seulement si $y = \varphi(x)$. De plus, les fonctions

$$\varphi_m : \overline{B(x_0, \eta_0)} \to \overline{B(y_0, \varepsilon_0)}$$

définies par la relation de récurrence

$$\varphi_{m+1}(x) = g(x, \varphi_m(x))$$

et la condition initiale

$$\varphi_0(x) = y_0$$

converge simplement vers $\varphi(x)$ sur $\overline{B(x_0, \eta_0)}$. Vu (*), on a même

$$|\varphi_{m+1}(x) - \varphi(x)| = |g(x, \varphi_m(x)) - g(x, \varphi(x))| \leq \mu |\varphi_m(x) - \varphi(x)|$$

pour tout $x \in \overline{B(x_0, \eta_0)}$, ce qui entraîne que

$$\sup_{x \in \overline{B(x_0, \eta_0)}} |\varphi_m(x) - \varphi(x)| \leq \mu^m \varepsilon_0$$

et montre que $\varphi_m \to \varphi$ uniformément sur $\overline{B(x_0, \eta_0)}$. Comme les fonctions φ_m sont clairement continues sur $B(x_0, \eta_0)$, il en découle qu'il en est de même de la fonction φ. Pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ il existe donc $\eta \in]0, \eta_0[$ tel que $\varphi(B(x_0, \eta)) \subset B(y_0, \varepsilon)$ et la première partie du résultat est établie.

Montrons maintenant que φ est de classe C_1 sur $B(x_0, \eta)$. Pour cela, remarquons d'abord que pour (x, y) fixé dans Ω on a

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k + o(|h| + |k|)$$

si $(h, k) \to (0, 0)$. Pour $x \in B(x_0, \eta)$, $y = \varphi(x)$ et $k = \varphi(x+h) - \varphi(x)$, cette relation montre que pour x fixé dans $B(x_0, y_0)$, on a

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) - T(x, y)h = o(|h| + |\varphi(x+h) - \varphi(x)|)$$

si $h \to 0$ où

$$T(x, y) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right].$$

Pour tout $C \in \,]0, 1[$, il existe donc $\delta > 0$ tel que $]x - \delta, x + \delta[\, \subset B(x_0, \eta_0)$ et pour lequel

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) - T(x, y)h| \leq C(|h| + |\varphi(x+h) - \varphi(x)|)$$

si $|h| < \delta$. Il s'ensuit que

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq (C + D)|h| + C|\varphi(x+h) - \varphi(x)|$$

si $|h| < \delta$ et si $D = \|T(x, y)\|$. On en tire que

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq \frac{C + D}{1 - C}|h|$$

si $|h| < \delta$ et par conséquent que

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) - T(x, y)h| \leq C\left(1 + \frac{C + D}{1 - C}\right)|h| \leq C\frac{1 + D}{1 - C}|h|$$

si $|h| \leq \delta$. Comme

$$\lim_{C \longrightarrow 0^+} C\frac{1 + D}{1 - C} = 0,$$

cela montre que

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + T(x, y)h + o(h).$$

On en tire que φ est dérivable en x et que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = T(x, y).$$

La conclusion en résulte aussitôt puisque $f \in C_1(\Omega)$, que $\varphi \in C_0(B(x_0, \eta_0))$ et que

$$\{(x, \varphi(x)) : x \in B(x_0, \eta_0)\} \subset B(x_0, \eta_0) \times B(y_0, \varepsilon_0) \subset \Omega.$$

$\square$

Définition 1.3.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $x_0 \in \Omega$ et soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions réelles de classe C_k $(k \geq 1)$ sur Ω. Nous dirons que les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ sont *différentiellement indépendantes* en x_0 si les vecteurs

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right), \ldots, \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_p}{\partial x_n}\right)$$

sont linéairement indépendants en x_0 ou ce qui revient au même si la jacobienne

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

est de rang p.

Proposition 1.3.3. *Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions réelles de classe C_k $(k \geq 1)$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et soit $x_0 \in \Omega$. Supposons que les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ sont différentiellement indépendantes en x_0. Alors il existe une permutation $\mu \in \mathfrak{S}_n$ et des réels $\varepsilon_1 > 0, \ldots, \varepsilon_n > 0$ tels que*

$$B(x_{01}, \varepsilon_1) \times B(x_{0n}, \varepsilon_n) \subset \Omega$$

et des fonctions de classe C_k

$$\begin{aligned}
\varphi_1 : B(x_{0\mu_{p+1}}, \varepsilon_{\mu_{p+1}}) \times \cdots \times B(x_{0\mu_n}, \varepsilon_{\mu_n}) &\to B(x_{0\mu_1}, \varepsilon_{\mu_1}) \\
&\vdots \\
\varphi_p : B(x_{0\mu_{p+1}}, \varepsilon_{\mu_{p+1}}) \times \cdots \times B(x_{0\mu_n}, \varepsilon_{\mu_n}) &\to B(x_{0\mu_p}, \varepsilon_{\mu_p})
\end{aligned}$$

pour lesquelles le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_1(x_1, \ldots, x_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_p(x_1, \ldots, x_n) & = & 0 \end{array}\right. \tag{*}$$

est équivalent sur $B(x_{01}, \varepsilon_1) \times B(x_{0n}, \varepsilon_n)$ au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{\mu_1} & = & \varphi_1(x_{\mu_{p+1}}, \ldots, x_{\mu_n}) \\ & \vdots & \\ x_{\mu_p} & = & \varphi_p(x_{\mu_{p+1}}, \ldots, x_{\mu_n}) \end{array}\right.$$

En d'autres termes, il est possible de paramètrer localement les solutions du système (*) par $(n-p)$ coordonnées bien choisies.

Démonstration. Il suffit de choisir μ pour que

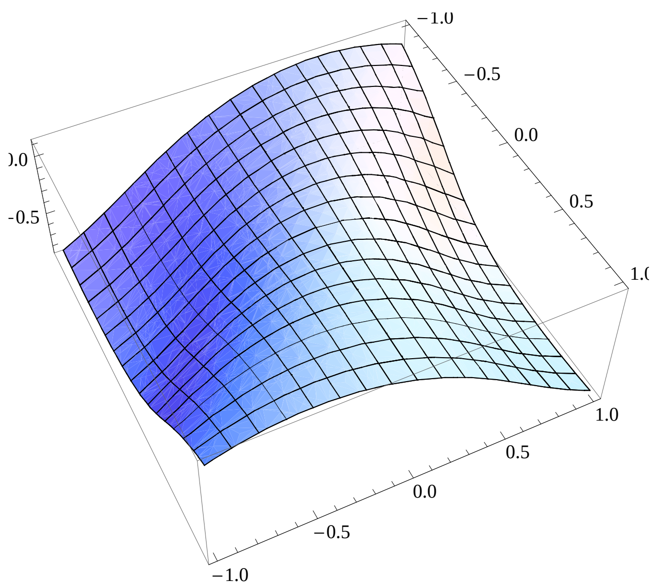
$$\det \frac{\partial(f_1, \ldots, f_p)}{\partial(x_{\mu_1} \ldots x_{\mu_p})}$$

diffère de 0 en x_0 et d'utiliser la Proposition 1.3.1. □

Exemples 1.3.4.
(a) Soit
$$f(x, y, z) = z^2 + zy + (y^2 + 1)x + x^5.$$
Il est clair que
$$f(0, 0, 0) = 0$$
et que
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 1 + 5x^4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = z + 2yx, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + y.$$
Il s'ensuit que
$$\frac{\partial f}{\partial(x, y, z)} = (1, 0, 0)$$
en $(0, 0, 0)$ et il est donc possible de paramètrer les solutions de l'équation

$$z^2 + zy + (y^2 + 1)x + x^5 = 0$$

voisines de $(0, 0, 0)$ par les coordonnées y et z.



(b) Soit

$$f(x,y,z) = \operatorname{tg}(xz) - y$$
$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

Il est clair que

$$f(0,0,0) = g(0,0,0) = 0$$

et que

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \dfrac{z}{\cos^2(xz)} & -1 & \dfrac{x}{\cos^2(xz)} \\ 2x & 2y & -1 \end{pmatrix}.$$

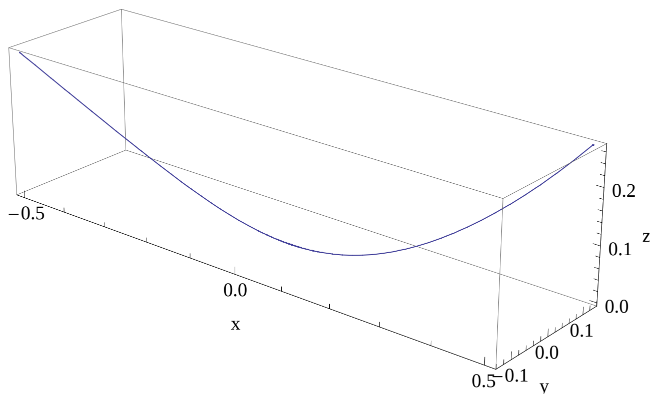
Pour $(x,y,z) = (0,0,0)$, cette matrice devient la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que f et g sont différentiellement indépendantes en $(0,0,0)$ et qu'il est possible de paramètrer les solutions du système

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xz) & = & y \\ x^2 + y^2 & = & z \end{cases}$$

voisines de $(0,0,0)$ par la coordonnée x.



1.4 Théorème d'inversion locale

Proposition 1.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit f une fonction de classe C_k $(k \geq 1)$ sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que le déterminant jacobien*

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

ne s'annule pas en $x_0 \in \Omega$. Alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans Ω dont l'image par f est ouverte et pour lequel

$$f : U \to f(U)$$

est une bijection dont l'inverse

$$f^{-1} : f(U) \to U$$

est de classe C_k. De plus, la matrice jacobienne de f^{-1} en $y = f(x)$ ($x \in U$) est l'inverse de la matrice jacobienne de f en x. En d'autres termes, on a

$$\left(\frac{\partial f^{-1}}{\partial y}\right)(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}(f^{-1}(y))$$

sur l'ouvert $V = f(U)$.

Démonstration. Posons

$$F(x, y) = f(x) - y$$

pour $x \in \Omega$ et $y \in \mathbb{R}^n$ et $y_0 = f(x_0)$. Vu nos hypothèses, il est clair que F est de classe C_k sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$, que $F(x_0, y_0) = 0$ et que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0).$$

Il résulte de la Proposition 1.3.1 qu'il existe un voisinage ouvert U_0 de x_0 dans Ω, un voisinage ouvert V_0 de y_0 dans $\mathbb{R}^n$ et une application $\Phi : V_0 \to U_0$ de classe C_k telle que

$$\{(x, y) \in U_0 \times V_0 : F(x, y) = 0\} = \{\Phi(y), y) : y \in V_0\}.$$

De plus, on sait aussi que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}(\Phi(y), y)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(\Phi(y), y)$$

pour tout $y \in V_0$. Il s'ensuit que pour tout $y \in V_0$ fixé, $\Phi(y)$ est la seule solution de l'équation

$$f(x) = y$$

dans U_0. On en tire que $f \circ \Phi = \mathrm{id}$ sur V_0 et que

$$\Phi \circ f = \mathrm{id}$$

sur $U_0 \cap f^{-1}(V_0)$ et cela montre que

$$f : U_0 \cap f^{-1}(V_0) \to V_0$$

est une bijection dont l'inverse est donné par

$$\Phi : V_0 \to U_0 \cap f^{-1}(V_0).$$

Pour conclure, il suffit alors de tenir compte du fait que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -I$$

sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$. □

1.5 Inversion locale de l'exponentielle matricielle

A titre d'exemple, montrons comment appliquer le théorème précédent à l'exponentielle matricielle

$$\exp : \mathbb{C}^n_n \to \mathbb{C}^n_n$$

définie par la formule

$$\exp(A) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{m!}.$$

Donnons d'abord un résultat montrant que cette formule a un sens.

Proposition 1.5.1. *Soit*

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$$

une série de puissances naturelles de rayon de convergence R et soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle associée à une norme vectorielle $|\cdot|$ sur $\mathbb{C}^n$. Alors la série matricielle

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m A^m$$

converge uniformément sur tout compact de l'ouvert

$$\Omega = \{A \in \mathbb{C}^n_n : \|A\| < R\}$$

de $\mathbb{C}^n_n$.

Démonstration. Soit K un compact de Ω. Comme $\|\cdot\|$ est continu sur K, on a

$$\sup_{A \in K} \|A\| = \rho < R.$$

Cela étant, la théorie des séries de puissances montre que

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \rho^m$$

converge. La conclusion résulte alors du critère de Cauchy puisque l'on a

$$\left\| \sum_{m=p}^{q} a_m A^m \right\| \leq \sum_{m=p}^{q} |a_m| \, \|A\|^m \leq \sum_{m=p}^{q} |a_m| \rho^m$$

si $A \in K$. □

Plus généralement, ce résultat permet de donner un sens à $f(A)$ lorsque f est une fonction holomorphe sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ et que A est une matrice voisine de 0 dans $\mathbb{C}_n^n$.

Définition 1.5.2. Soit f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0, R)$. Vu le théorème de Taylor, on sait que

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} z^m$$

pour tout $z \in D(0, R)$. Cela étant, nous poserons

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} A^m$$

pour tout $A \in \mathbb{C}_n^n$ tel que $\|A\| < R$.

Si nous voulons appliquer la Proposition 1.4.1 à l'exponentielle matricielle, notre premier travail consiste à vérifier que cette application est au moins de classe C_1. En fait, on dispose du résultat général suivant :

Proposition 1.5.3. *Soit f une fonction holomorphe sur $D(0, R)$. Alors l'application*

$$f : A \mapsto f(A)$$

est de classe C_1 sur $\Omega = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \|A\| < R\}$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial H}(A) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\sum_{k=0}^{m-1} A^k H A^{m-1-k} \right)$$

pour tout $A \in \Omega$ et tout $H \in \mathbb{C}_n^n$.

Démonstration. Soit $A \in \Omega$ et soit $H \in \mathbb{C}_n^n$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\|A\| + \varepsilon \|H\| = \rho < R$. Alors, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a $\|A + tH\| < R$ et

$$f(A + tH) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (A + tH)^m.$$

De plus, la fonction
$$t \mapsto (A+tH)^m$$
est clairement de classe C_1 sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et on a
$$\frac{\partial (A+tH)^m}{\partial t} = \sum_{k=0}^{m-1} (A+tH)^k H (A+tH)^{m-1-k}$$
si $|t| < \varepsilon$. On en tire que
$$\begin{aligned}\left\| \sum_{m=p}^{q} a_m \frac{\partial (A+tH)^m}{\partial t} \right\| &= \left\| \sum_{m=p}^{q} a_m \sum_{k=0}^{m-1} (A+tH)^k H (A+th)^{m-1-k} \right\| \\ &\leq \sum_{m=p}^{q} m|a_m| \, \|A+tH\|^{m-1} \, \|H\| \\ &\leq \sum_{m=p}^{q} m|a_m| \rho^{m-1} \, \|H\| \,. \end{aligned}$$
Comme
$$f'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m z^{m-1}$$
sur $D(0,R)$, on sait que
$$\sum_{m=1}^{\infty} m|a_m|\rho^{m-1}$$
converge. Le critère de Cauchy montre alors que
$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\partial (A+tH)^m}{\partial t}$$
converge uniformément en t sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$. La conclusion résulte alors du théorème de dérivation des séries. □

Remarque 1.5.4. Plaçons-nous dans les conditions de la proposition précédente mais supposons de plus que les matrices A et H commutent. Alors, un calcul direct montre que
$$\frac{\partial f}{\partial H}(A) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m A^{m-1} H = f'(A)H.$$
On ne peut malheureusement pas espérer un résultat aussi simple lorsque A et H ne commutent pas.

En appliquant le résultat précédent à l'exponentielle matricielle, on voit de suite que

$$\exp : \mathbb{C}_n^n \to \mathbb{C}_n^n$$

est de classe C_1 et que

$$\frac{\partial \exp}{\partial H}(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m-1} A^k H A^{m-1-k}$$

pour tout $A \in \mathbb{C}_n^n$ et tout $H \in \mathbb{C}_n^n$. Cela montre en particulier que

$$\frac{\partial \exp}{\partial H}(0) = H.$$

La matrice jacobienne de exp en 0 est donc inversible et la Proposition 1.4.1 montre qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}_n^n$ et un voisinage V de $I = \exp(0)$ dans $\mathbb{C}_n^n$ tels que $V = \exp(U)$ et pour lesquels

$$\exp : U \to V$$

est un difféomorphisme. Essayons de déterminer

$$\exp^{-1} : V \to U.$$

Lorsque $n = 1$, il est clair que

$$\exp^{-1}(z) = \ln(z)$$

sur un voisinage de 1 de $\mathbb{C}$. Puisque

$$\ln(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{(z-1)^m}{m}$$

si $|z - 1| < 1$, il est naturel d'espérer que

$$\exp^{-1} : V \to U$$

soit égal à

$$\ln A := \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{(A-I)^m}{m}$$

sur un voisinage de I dans $\mathbb{C}_n^n$. Pour vérifier que c'est bien le cas, il suffit de remarquer que

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{(A-I)^m}{m} = l(A - I)$$

où l est la fonction holomorphe

$$z \mapsto \ln(1 + z)$$

restreinte à $D(0, 1)$ et d'utiliser le résultat suivant :

Proposition 1.5.5. *Soient R et S des réels strictement positifs et soient*

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m \qquad \text{et} \qquad g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m$$

des fonctions holomorphes respectivement sur $D(0,R)$ et $D(0,S)$ s'annulant en 0. Posons

$$c_m = \sum_{\substack{k\geq 1, l_1\geq 1,\ldots,l_k\geq 1\\ l_1+\cdots+l_k=m}} b_k a_{l_1} \ldots a_{lk}$$

pour tout $m \geq 1$. Alors

$$h(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m$$

est holomorphe sur $D(0,T)$ si

$$T = \sup\{\tau > 0 : \tau < R, \sum_{m=1}^{\infty} |a_m|\tau^m < S\}$$

et coïncide avec $g \circ f$ sur cet ensemble. De plus, on a

$$g(f(A)) = h(A)$$

pour tout $A \in \mathbb{C}_n^n$ tel que $\|A\| < T$.

Démonstration. Soit $\tau \in]0, R[$ tel que

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|\tau^m < S$$

et soit $z \in D(0,\tau)$. Considérons la famille de nombres complexes

$$\left(b_k a_{l_1} z^{l_1} \ldots a_{l_k} z^{l_k}\right)_{(k,l)\in I}$$

où

$$I = \{(k,l) : k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}_0^k\}.$$

Posons

$$I_k = \{(k,l) : l \in \mathbb{N}_0^k\}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Puisque I est l'union disjointe des I_k avec $k \in \mathbb{N}_0$ et que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{l_k=1}^{\infty} |b_k a_{l_1} z^{l_1} \ldots a_{l_k} z^{l_k}| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \left(\sum_{l_1=1}^{\infty} |a_{l_1}||z|^{l_1}\right) \cdots \left(\sum_{l_k=1}^{\infty} |a_{l_k}||z|^{l_k}\right)\\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \left(\sum_{l=1}^{\infty} |a_l|\tau^l\right)^k\end{aligned}$$

si $|z| \leq \tau$, on voit que la famille considérée plus haut est absolument sommable si $|z| \leq \tau$. Posons

$$J_m = \{(k,l) : k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}_0^k, l_1 + \cdots + l_k = m\}.$$

Par construction, il est clair que J_m est fini pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et que I est l'union disjointe de J_m avec $m \in \mathbb{N}_0$. Vu ce qui précède, on en tire que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_l z^l\right)^k &= \sum_{(k,l)\in I} b_k a_{l_1} z^{l_1} \dots a_{l_k} z^{l_k} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{(k,l)\in J_m} b_k a_{l_1} \dots a_{l_k} z^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m\end{aligned}$$

si $|z| \leq \tau$. En raisonnant de même avec z remplacé par A et $|z|$ remplacé par $\|A\|$, on voit aussi que

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_l A^l\right)^k = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A^m$$

pour tout $A \in \mathbb{C}_n^n$ tel que $\|A\| \leq \tau$. La conclusion est alors immédiate. $\square$

En fait, dans le cas où $g(z) = \exp(z)$ et $f(z) = l(z)$, on a $R = 1$ et $S = +\infty$ et le résultat précédent montre que

$$\exp(\ln A) = A$$

pour tout $A \in \mathbb{C}_n^n$ tel que $\|A - I\| < 1$. De même, dans le cas où $g(z) = l(z)$ et $f(z) = \exp(z) - 1$, on a $R = +\infty$, $S = 1$ et on tire que

$$\ln(\exp(A)) = A$$

si $A \in \mathbb{C}_n^n$ est tel que $\|A\| < T$ où

$$\begin{aligned}T &= \sup\{\tau > 0 : \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau^m}{m!} < 1\} \\ &= \sup\{\tau > 0 : e^\tau - 1 < 1\} \\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

Cela étant, si nous posons

$$U = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \|A\| < \ln 2\}$$

et

$$V = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \|A - I\| < 1, \|\ln A\| < \ln 2\}$$

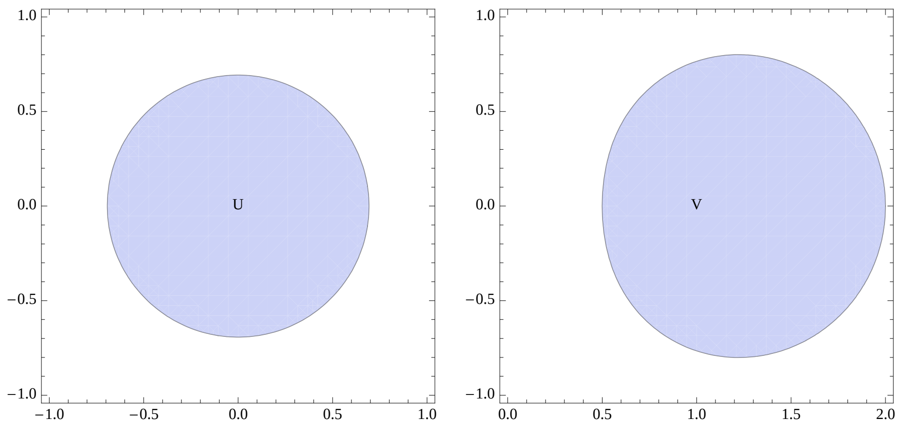
il est alors clair que $\exp(U) \subset V$, que $\ln(V) \subset U$ et que

$$\exp : U \to V$$

et

$$\ln : V \to U$$

sont des difféomorphismes inverses l'un de l'autre. Dans le cas où $n = 1$, les ouverts U et V sont faciles à visualiser.



1.6 Théorème du rang constant

Proposition 1.6.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C_k ($k \geq 1$). Supposons que*

$$\operatorname{rg}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = p$$

sur un voisinage de $x_0 \in \Omega$. Alors, il existe un voisinage U_0 de x_0 dans Ω, un voisinage V_0 de $y_0 = f(x_0)$ dans $\mathbb{R}^m$, des voisinages $\widetilde{U_1} = \widetilde{V_1}$, $\widetilde{U_2}$, $\widetilde{V_2}$ de 0 respectivement dans $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^{n-p}$, $\mathbb{R}^{m-p}$ et des difféomorphismes

$$\varphi : U_0 \to \widetilde{U_1} \times \widetilde{U_2}, \qquad \psi : V_0 \to \widetilde{V_1} \times \widetilde{V_2}$$

tels que

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}) = (\widetilde{x_1}, 0)$$

sur $\widetilde{U_1} \times \widetilde{U_2}$.

Démonstration. Identifions $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ et notons (x_1, x_2) l'image de $x \in \mathbb{R}^n$ par cette identification. De même, identifions $\mathbb{R}^m$ à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p}$ et notons (y_1, y_2) l'image de $y \in \mathbb{R}^m$ par cette identification. Quitte à composer f avec des translations et des permutations, nous pouvons supposer que x_0 et y_0 sont respectivement les origines de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ et que

$$\det \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) \neq 0.$$

Considérons alors l'application φ définie sur Ω en posant

$$\varphi(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), x_2).$$

Par construction,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Vu ce qui précède, on a donc

$$\det \frac{\partial \varphi}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0$$

et le théorème de la fonction inverse montre qu'il existe un voisinage U_0 de x_0 dans Ω dont l'image par φ est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et pour lequel

$$\varphi : U_0 \to \varphi(U_0)$$

est un difféomorphisme de classe C_k. Quitte à restreindre U_0, on peut même supposer que $\varphi(U_0) = \widetilde{U_1} \times \widetilde{U_2}$ où $\widetilde{U_1}$ et $\widetilde{U_2}$ sont des voisinages de 0 respectivement dans $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^{n-p}$. Posons

$$g(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}) = (f \circ \varphi^{-1})(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}).$$

Par construction, on a

$$g_1(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}) = \widetilde{x_1}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2})} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial \widetilde{x_1}} & \dfrac{\partial g_2}{\partial \widetilde{x_2}} \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\operatorname{rg} \frac{\partial g}{\partial(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2})} = p$$

sur un voisinage de $(0, 0)$, on en tire

$$\frac{\partial g_2}{\partial \widetilde{x_2}}$$

est nul sur un voisinage de $(0,0)$. Quitte à restreindre $\widetilde{U_1}$ et $\widetilde{U_2}$ on peut donc supposer que

$$g_2(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}) = h(\widetilde{x_1})$$

où $h : \widetilde{U_1} \to \mathbb{R}^{m-p}$ est de classe C_k. Posons alors

$$\psi(y_1, y_2) = (y_1, y_2 - h(y_1))$$

pour tout $y_1 \in \widetilde{U_1}$ et tout $y_2 \in \mathbb{R}^{m-p}$. On a clairement

$$(\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}) = \psi(y_1, y_2)$$

si et seulement si

$$y_1 = \widetilde{y_1}, \quad y_2 = \widetilde{y_2} + h(\widetilde{y_1}).$$

En d'autres termes,

$$\psi : \widetilde{U_1} \times \mathbb{R}^{m-p} \to \widetilde{U_1} \times \mathbb{R}^{m-p}$$

est un difféomorphisme. Pour conclure, il suffit alors de poser $\widetilde{V_1} = \widetilde{U_1}$, $\widetilde{V_2} = \mathbb{R}^{m-p}$ et de constater que

$$\begin{aligned}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}) &= (\psi \circ g)(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}) \\ &= (g_1(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}), g_2(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}) - h(\widetilde{x_1})) \\ &= (\widetilde{x_1}, 0)\end{aligned}$$

si $(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}) \in \widetilde{U_1} \times \widetilde{U_2}$. □

1.7 Lemme de Morse

Soit f une fonction réelle de classe C_k sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Les résultats obtenus dans les sections précédentes clarifient de manière très satisfaisante la nature de l'ensemble S des solutions de l'équation

$$f(x) = 0$$

dans Ω près d'un $x_0 \in S$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \neq 0.$$

Cependant, ces résultats ne nous donnent d'information dans le cas où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 0$$

que si f est identiquement nul sur un voisinage de x_0.

A titre d'exemple de ce qui peut se passer dans les autres cas, nous allons à présent établir un résultat intéressant dû à M. Morse et qui a de nombreuses applications en topologie différentielle.

Proposition 1.7.1. *Soit f une fonction réelle de classe C_k $(k \geq 3)$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et soit $x_0 \in \Omega$. Supposons que f s'annule avec toutes ses dérivées en x_0 mais que la matrice hessienne de f en x_0 soit une matrice symétrique non singulière de signature (p, m). Alors il existe un voisinage U_0 de x_0 dans Ω, un voisinage V_0 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\varphi : V_0 \to U_0$ de classe C_{k-2} tel que $\varphi(x_0) = 0$ et pour lequel*

$$(f \circ \varphi)(y) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+m}^2$$

pour tout $y \in V_0$.

Démonstration. Remarquons d'abord que si

$$\varphi : V_0 \to U_0$$

est un difféomorphisme entre un voisinage de $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et un voisinage de $x_0 = \varphi(y_0)$ dans Ω, alors on a

$$\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial y_k} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_s} \circ \varphi \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k}$$

et

$$\frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial y_j \partial y_k} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s} \circ \varphi \frac{\partial \varphi_r}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_s} \circ \varphi \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_j \partial y_k}$$

Comme les dérivées premières de f s'annulent en x_0, on en tire que

$$\mathrm{Grad}_{y_0}(f \circ \varphi) = 0$$

et que

$$\mathrm{Hess}_{y_0}(f \circ \varphi) = \widetilde{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}(y_0) \, \mathrm{Hess}_{x_0} f \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y_0).$$

Cela étant, la théorie de la réduction des formes quadratiques réelles (voir Appendice) nous montre que, quitte à composer f avec un changement de variable affine, on peut supposer que $x_0 = 0$ et que

$$\frac{1}{2} \mathrm{Hess}_{x_0} f = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_m \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions, posons $\varepsilon = d(0, \complement\Omega)$ et considérons $x \in B(0, \varepsilon)$. En appliquant la formule de Taylor limitée avec reste intégral à

$$t \mapsto f(tx)$$

pour $t \in [0, 1]$, on voit que

$$f(tx)|_{t=1} = f(tx)|_{t=0} + \left.\frac{\partial f(tx)}{\partial t}\right|_{t=0} + \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f(tx)}{\partial t^2} \, dt$$

et par conséquent que

$$f(x) = \int_0^1 (1-t)\left\langle (\mathrm{Hess}_{tx} f)x, x\right\rangle \, dt.$$

Posons

$$S(x) = \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{Hess}_{tx} f \, dt$$

pour tout $x \in B(0, \varepsilon)$. Par construction, la loi

$$x \mapsto S(x)$$

définit bien sûr une application C_{k-2} de $B(0,\varepsilon)$ dans le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n^n$ formé par les matrices symétriques. De plus, on a

$$S(0) = 2\,\mathrm{Hess}_0 f = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_m \end{pmatrix}$$

et

$$f(x) = \langle S(x)x, x\rangle$$

pour tout $x \in B(0,\varepsilon)$. Grâce au Lemme ci-après, on trouve alors une application

$$x \mapsto R(x)$$

de classe C_{k-2} sur $B(0,\varepsilon)$ et à valeurs dans le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n^n$ formé par les matrices triangulaires supérieures pour laquelle on a $R(0) = I$ et $S(x) = \widetilde{R(x)}S(0)R(x)$ pour tout $x \in B(0,\varepsilon)$. Posons

$$\psi(x) = R(x)x$$

pour tout $x \in D(0,\varepsilon)$. Par construction ψ est de classe C_{k-2} sur $B(0,\varepsilon)$ et on a

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial R_{jl}(x)}{\partial x_k} x_l + R_{jl}(x)\frac{\partial x_l}{\partial x_k}$$

sur $B(0,\varepsilon)$. Cela montre en particulier que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0) = I$$

et que ψ établit un difféomorphisme de classe C_{k-2} entre un voisinage U_0 de 0 dans $B(0,\varepsilon)$ et un voisinage V_0 de 0 dans $\mathbb{R}^n$. De plus, comme on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle S(x)x, x\rangle \\ &= \left\langle \widetilde{R(x)}S(0)R(x)x, x\right\rangle \\ &= \langle S(0)R(x)x, R(x)x\rangle \end{aligned}$$

pour tout $x \in B(0, \varepsilon)$, il est clair que

$$(f \circ \psi^{-1})(y) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+m}^2$$

sur V_0. Pour conclure, il suffit donc de poser $\varphi = \psi^{-1}$. $\square$

Lemme 1.7.2. *Soit D une matrice diagonale réelle et non singulière. Alors la loi*

$$R \mapsto \tilde{R} D R$$

induit un difféomorphisme de classe C_∞ entre un voisinage de I dans le sous-espace vectoriel T de $\mathbb{R}_n^n$ formé par les matrices triangulaires supérieures et un voisinage de D dans le sous-espace vectoriel S de $\mathbb{R}_n^n$ formé par les matrices symétriques.

Démonstration. Notons

$$\sigma : T \to S$$

l'application considérée dans l'énoncé. Vu sa définition, il est clair que σ est de classe C_∞. De plus, si $H \in T$, on a

$$\frac{\partial \sigma}{\partial H}(I) = \frac{\partial}{\partial t}\left[(I + t\tilde{H}) D (I + tH)\right]_{t=0} = \tilde{H} D + DH.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial H}(I) = 0$$

si et seulement si la matrice DH est antisymétrique. Comme cette matrice est aussi triangulaire supérieure, cela ne peut arriver que si $DH = 0$ c'est-à-dire si $H = 0$. Ce raisonnement montre que la différentielle de σ en I est injective. Comme $\dim S = \dim T$, cette différentielle est aussi surjective et on peut donc conclure par le théorème d'inversion locale. $\square$

2 Systèmes différentiels normaux du premier ordre

2.1 Théorèmes d'existence et d'unicité dans le cas général

Définition 2.1.1. Dans la suite, nous appellerons *système normal d'équations différentielles ordinaires du premier ordre* un système du type

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une application continue dont le domaine Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Nous appellerons *solution de ce système sur un intervalle ouvert* I de $\mathbb{R}$ une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C_1 telle que

(a) $(t, \varphi(t)) \in \Omega$,

(b) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

pour tout $t \in I$.

Plutôt que de chercher à décrire directement toutes les solutions d'un système normal du premier ordre donné, il s'avère plus simple de commencer par étudier celles qui vérifient une condition initiale du type

$$\varphi(t_0) = x_0$$

pour un $(t_0, x_0) \in \Omega$ fixé (*i.e.* d'étudier les problèmes de Cauchy associés).

Une première étape importante pour résoudre un tel problème consiste à remarquer qu'il admet la formulation intégrale suivante :

Proposition 2.1.2. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, soit $(t_0, x_0) \in \Omega$ et soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ une application continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0 telle que $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in I$. Alors, pour que φ soit une solution du système*

$$x' = f(x, t)$$

passant par x_0 en t_0, il faut et il suffit que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

pour tout $t \in I$.

Démonstration. Si φ est une solution du système

$$x' = f(t, x)$$

alors φ est de classe C_1 sur I et on a

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

pour tout $t \in I$. Il s'ensuit que

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau.$$

Si de plus $\varphi(t_0) = x_0$, on en tire directement que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

pour tout $t \in I$.

Réciproquement, si

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

pour tout $t \in I$, il résulte de la continuité de

$$f(t, \varphi(t))$$

sur I que $\varphi(t)$ est de classe C_1 sur I et que

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

pour tout $t \in I$. Comme on a bien sûr aussi $\varphi(t_0) = x_0$, le résultat est établi. □

L'équation intégrale rencontrée dans le résultat précédent est en fait une équation de «point» fixe pour l'opérateur

$$\varphi \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

défini sur l'ensemble des applications continues $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ telles que

$$(t, \varphi(t)) \in \Omega$$

pour tout $t \in I$. On est donc conduit assez naturellement à essayer de la résoudre en adaptant le théorème du point fixe usuel :

Lemme 2.1.3. *Soit $B(x_0, R)$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant t_0 et soit*

$$f : I \times B(x_0, R) \to \mathbb{R}^n$$

une application continue. Supposons qu'il existe $L > 0$ et $M > 0$ et $\theta > 0$ tels que

(a) $|f(t,y) - f(t,x)| \leq L|y-x|$,

(b) $|f(t,x)| \leq M$,

(c) $|t - t_0| \leq \theta$,

si (t,x) *et* $(t,y) \in I \times B(x_0,R)$. *Supposons également que*

$$\theta < \inf(R/M, 1/L).$$

Alors, il existe une et une seule application continue

$$\varphi : I \to B(x_0,R)$$

telle que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

pour tout $t \in I$.

Démonstration. Posons

$$\mathcal{T}(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

pour tout $\varphi \in C_0(I; B(x_0,R))$ et tout $t \in I$. Par construction, il est clair que l'application

$$\mathcal{T}(\varphi) : I \to \mathbb{R}^n$$

est de classe C_1. De plus, comme

$$\mathcal{T}(\varphi)(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau,$$

il résulte de (b) que

$$|\mathcal{T}(\varphi)(t) - x_0| \leq M\theta < R$$

pour tout $t \in I$. Il s'ensuit que

$$\mathcal{T}(C_0(I; B(x_0,R))) \subset C_0(I; \overline{B(x_0, M\theta)}) \subset C_0(I; B(x_0,R)).$$

En particulier $\mathcal{T}$ est une transformation de $C_0(I; B(x_0,R))$ et tout revient à montrer que cette transformation possède un unique «point» fixe.

Soient φ, ψ deux applications continues de I dans $B(x_0,R)$. Vu la définition de $\mathcal{T}$, il est clair que

$$\mathcal{T}(\psi)(t) - \mathcal{T}(\varphi)(t) = \int_{t_0}^{t} [f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))]\ d\tau$$

pour tout $t \in I$. Vu (a), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}(\psi)(t) - \mathcal{T}(\varphi)(t)| &\leq L \int_{t_0}^{t} |\psi(\tau) - \varphi(\tau)| \, d\tau \\ &\leq L\theta \sup_{\tau \in I} |\psi(\tau) - \varphi(\tau)|\end{aligned}$$

pour tout $t \in I$. Si on convient de noter $\|\cdot\|_I$ la norme uniforme sur I, cette relation peut se réécrire sous la forme

$$\|\mathcal{T}(\psi) - \mathcal{T}(\varphi)\|_I \leq L\theta \, \|\psi - \varphi\|_I \, .$$

Comme $L\theta < 1$ vu (c), cela montre que l'application

$$\mathcal{T} : C_0(I; B(x_0, R)) \to C_0(I; B(x_0, R))$$

est contractante pour la distance uniforme sur I.

Notons φ_0 l'application constante de I dans $B(x_0, R)$ définie en posant

$$\varphi_0(t) = x_0$$

pour tout $t \in I$ et construisons de proche en proche les $\varphi_m \in C_0(I; B(x_0, R))$ en posant

$$\varphi_{m+1} = \mathcal{T}(\varphi_m)$$

pour tout $m \geq 0$. Par construction, on a

$$\|\varphi_{m+1} - \varphi_m\|_I = \|\mathcal{T}(\varphi_m) - \mathcal{T}(\varphi_{m-1})\|_I \leq L\theta \, \|\varphi_m - \varphi_{m-1}\|_I$$

pour tout $m \geq 1$. Il s'ensuit que

$$\|\varphi_{m+1} - \varphi_m\|_I \leq (L\theta)^m \, \|\varphi_1 - \varphi_0\|_I$$

pour tout $m \geq 0$. Si $q > p \geq 0$, on tire alors de la relation

$$\varphi_q - \varphi_p = \sum_{m=p}^{q-1} (\varphi_{m+1} - \varphi_m)$$

que

$$\|\varphi_q - \varphi_p\|_I \leq \sum_{m=p}^{q-1} (L\theta)^m \, \|\varphi_1 - \varphi_0\|_I \, .$$

La suite φ_m est donc uniformément de Cauchy sur I. Elle converge donc uniformément sur I vers un $\varphi \in C_0(I; \mathbb{R}^n)$. Comme

$$|\varphi_{m+1}(t) - x_0| = |\mathcal{T}(\varphi_m)(t) - x_0| \leq M\theta$$

pour tout $t \in I$ et tout $m \geq 0$, un passage à la limite montre que

$$\varphi(I) \subset \overline{B(x_0, M\theta)} \subset B(x_0, R).$$

Cela étant, la relation

$$\|\varphi_{m+1} - \mathcal{T}(\varphi)\|_I = \|\mathcal{T}(\varphi_m) - \mathcal{T}(\varphi)\|_I \leq L\theta \, \|\varphi_m - \varphi\|_I$$

a lieu pour tout $m \geq 0$. Un passage à la limite dans cette relation montre alors que

$$\mathcal{T}(\varphi) = \varphi$$

et que $\mathcal{T}$ possède un «point» fixe dans $C_0(I; B(x_0, R))$.

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que si ψ est un autre «point» fixe de $\mathcal{T}$ dans $C_0(I; B(x_0, R))$ alors la relation

$$\|\psi - \varphi\|_I = \|\mathcal{T}(\psi) - \mathcal{T}(\varphi)\|_I \leq L\theta \, \|\psi - \varphi\|_I$$

montre que $\psi = \varphi$ sur I puisque sinon on en tirerait que

$$1 \leq L\theta$$

en contradiction avec (c). □

La condition (a) du lemme précédent est due à Lipschitz. Comme des conditions de ce type vont revenir souvent dans la suite, nous allons adopter la définition suivante :

Définition 2.1.4. Soit D une partie de $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, soit $f : D \to \mathbb{R}^n$ une application. Pour tout $L > 0$, on dit que $f(x_1, x_2)$ est *L-lipschitzienne par rapport à x_2 sur D* si

$$|f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)| \leq L|y_2 - x_2|$$

pour tous (x_1, x_2), $(x_1, y_2) \in D$.

Lorsque la condition précédente est satisfaite pour au moins un $L > 0$, on dit simplement que $f(x_1, x_2)$ est *lipschitzienne par rapport à x_2 sur D.*

Enfin, lorsque tout point de D possède un voisinage sur lequel $f(x_1, x_2)$ est lipschitzienne par rapport à x_2, on dit que f est *localement lipschitzienne par rapport à x_2 sur D.*

Proposition 2.1.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ et soit f une fonction définie sur Ω. Supposons que*

$$\Omega_{x_1} = \{x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} : (x_1, x_2) \in \Omega\}$$

soit convexe pour tout $x_1 \in \mathbb{R}^n$*, que* $f(x_1, x_2)$ *soit continûment dérivable par rapport à* x_2 *sur* Ω_{x_1} *pour tout* $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ *et que*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\| \leq L$$

sur Ω*. Alors* f *est* L*-lipschitzienne par rapport à* x_2 *sur* Ω*.*

Démonstration. Supposons que (x_1, x_2) et $(x_1, y_2) \in \Omega$. Comme Ω_{x_1} est convexe, le segment $[(x_1, x_2), (x_1, y_2)]$ est inclus dans Ω et la fonction

$$t \mapsto f(x_1, x_2 + t(y_2 - x_2))$$

est continûment dérivable sur $[0, 1]$. De plus, comme

$$\frac{\partial f(x_1, x_2 + t(y_2 - x_2))}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + t(y_2 - x_2))(y_2 - x_2)$$

on a aussi

$$f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + t(y_2 - x_2))(y_2 - x_2)\, dt.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)| &= \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + t(y_2 - x_2))(y_2 - x_2) \right| dt \\ &\leq \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + t(y_2 - x_2)) \right\| |y_2 - x_2|\, dt \\ &\leq L|y_2 - x_2| \end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

Corollaire 2.1.6. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ *et soit* f *une fonction définie sur* Ω*. Supposons que* $f(x_1, x_2)$ *soit continûment dérivable par rapport à* x_2 *sur* Ω*. Alors* f *est localement lipschitzienne sur* Ω*.*

Démonstration. Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset \Omega.$$

Comme $f(x_1, x_2)$ est continûment dérivable par rapport à x_2 sur Ω et que $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$ est compact, il existe alors $L > 0$ tel que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\| \leq L$$

sur $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$. On peut alors conclure en utilisant la convexité de $B(x_0, \varepsilon)$ et la proposition précédente. □

Proposition 2.1.7. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ et soit f une fonction continue sur Ω. Supposons que $f(x_1, x_2)$ soit localement lipschitzienne par rapport à x_2 sur Ω. Alors tout compact K de Ω possède un voisinage V dans Ω sur lequel $f(x_1, x_2)$ est lipschitzienne par rapport à x_2.*

Démonstration. Par hypothèse, pour tout $x_0 \in \Omega$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $L_0 > 0$ tels que $B(x_0, \varepsilon_0) \subset \Omega$ et pour lesquels

$$|f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)| \leq L_0 |y_2 - x_2|$$

pour tous les (x_1, y_2), $(x_1, x_2) \in B(x_0, \varepsilon_0)$. Puisque K est un compact de Ω, il existe un nombre fini de points $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ de K et des réels strictement positifs $(L_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha \in A}$ tels que

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B(x_\alpha, \varepsilon_\alpha/2)$$

et pour lesquels

$$|f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)| \leq L_\alpha |y_2 - x_2|$$

pour tous les (x_1, y_2), $(x_1, x_2) \in B(x_\alpha, \varepsilon_\alpha)$. Posons

$$V = \bigcup_{\alpha \in A} B(x_\alpha, \varepsilon_\alpha/2) \qquad \text{et} \qquad M = \sup_V |f|$$

et considérons $x = (x_1, x_2) \in V$. Alors, il existe $\alpha \in A$ tel que

$$|x - x_\alpha| < \varepsilon_\alpha/2.$$

Supposons maintenant que $y = (x_1, y_2) \in V$. Si $|y_2 - x_2| < \varepsilon_\alpha/2$ alors $y \in B(x_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ et on a

$$|f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)| \leq L_\alpha |y_2 - x_2|.$$

Si $|y_2 - x_2| \geq \varepsilon_\alpha/2$, la majoration

$$|f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)| \leq 2M$$

montre que

$$|f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)| \leq \frac{4M}{\varepsilon_\alpha} |y_2 - x_2|.$$

Il s'ensuit que dans tous les cas, on a

$$|f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)| \leq L |y_2 - x_2|$$

si on choisit

$$L = \sup_{\alpha \in A} \sup \left(L_\alpha, \frac{4M}{\varepsilon_\alpha} \right).$$

$\square$

Proposition 2.1.8 (Unicité globale)**.** *Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. Supposons que $f(t,x)$ soit localement lipschitzienne par rapport à x sur Ω et que φ et ψ soient deux solutions du problème de Cauchy*

$$x'(t) = f(t, x(t)); \qquad x(t_0) = x_0$$

sur un même intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0. Alors

$$\varphi = \psi$$

sur I.

Démonstration. Posons

$$E = \{t \in I : \varphi(t) = \psi(t)\}.$$

Par construction, E est un fermé de I qui contient t_0. Soit $t_1 \in E$ et soit $x_1 = \varphi(t_1)$. Il existe alors $R_1 > 0$ et $\varepsilon_1 > 0$ tels que

$$]t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1[\times B(x_1, R_1)$$

soit un voisinage relativement compact de (t_1, x_1) dans Ω sur lequel $f(t,x)$ est L_1-lipschitzien pour un $L_1 > 0$ bien choisi. Comme f est continu sur Ω il existe $M_1 > 0$ tel que

$$f(t,x) \leq M_1$$

si $|t - t_1| \leq \varepsilon_1$, $|x - x_1| \leq R_1$. Comme $\varphi(t_1) = x_1 = \psi(t_1)$ et que φ et ψ sont continus sur I, il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < \inf(\varepsilon_1, R_1/M_1, 1/L_1)$$

et pour lequel on a

$$]t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1[\subset I,$$

$$\varphi\left(]t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1[\right) \subset B(x_1, R_1), \qquad \psi\left(]t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1[\right) \subset B(x_1, R_1).$$

Pour un tel ε, le Lemme 2.1.3 montre que

$$\varphi(t) = \psi(t)$$

pour tout $t \in]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[$. On en tire que $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[\subset E$ et, comme t_1 peut être choisi arbitrairement dans E, il s'ensuit que E est une partie ouverte de I. La connexité de I entraîne alors que $E = I$; d'où la conclusion. $\square$

Proposition 2.1.9 (Existence locale)**.** *Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Supposons que $f(t,x)$ soit localement lipschitzienne par rapport à x sur Ω. Alors pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que le problème de Cauchy*

$$x'(t) = f(t, x(t)); \qquad x(t_0) = x_0$$

possède une solution sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ quel que soit $(t_0, x_0) \in K$.

Démonstration. Vu la Proposition 2.1.7, on sait que K possède un voisinage ouvert relativement compact dans Ω sur lequel $f(t,x)$ est L-lipschitzienne par rapport à x pour un $L > 0$ bien choisi. Posons

$$M = \sup_V |f|.$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ et $R > 0$ de sorte que

$$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(x_0, R) \subset V$$

pour tout $(t_0, x_0) \in K$ et que

$$\varepsilon < \inf(R/M, 1/L).$$

Dans ces conditions, f vérifie les conditions du Lemme 2.1.3 sur

$$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(x_0, R)$$

et il existe donc un et un seul $\varphi \in C_1(]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\,, B(x_0, R))$ tel que

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

et pour lequel $\varphi(t_0) = x_0$. □

Définition 2.1.10. Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, soit $(t_0, x_0) \in \Omega$ et soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ deux solutions du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)); \qquad x(t_0) = x_0.$$

Nous dirons que ψ *prolonge* φ si $J \supset I$ et si $\psi_{|I} = \varphi$.

Lorsque φ n'admet pas d'autre prolongement que lui-même, nous dirons que φ est une solution *non-prolongeable* du problème de Cauchy considéré.

Proposition 2.1.11. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue et soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. Supposons que $f(t,x)$ soit localement lipschitzienne par rapport à x sur Ω. Alors le problème de Cauchy*

$$x'(t) = f(t, x(t)); \qquad x(t_0) = x_0$$

possède une et une seule solution non-prolongeable. De plus, cette solution prolonge toute autre solution du problème de Cauchy considéré.

Démonstration. Soit $(\varphi_s : I_s \to \mathbb{R}^n)_{s\in S}$ la famille des solutions du problème considéré. Puisque

$$\varphi_{s_0}|_{I_{s_0}\cap I_{s_1}} : I_{s_0} \cap I_{s_1} \to \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad \varphi_{s_1}|_{I_{s_0}\cap I_{s_1}} : I_{s_0} \cap I_{s_1} \to \mathbb{R}^n$$

sont deux solutions de notre problème sur le même intervalle, la Proposition 2.1.8 montre que

$$\varphi_{s_0}(t) = \varphi_{s_1}(t)$$

pour tout $t \in I_{s_0} \cap I_{s_1}$. Il s'ensuit qu'il existe un et un seul φ défini sur

$$I = \bigcup_{s\in S} I_s$$

et tel que

$$\varphi_{|I_s} = \varphi_s$$

pour tout $s \in S$. Par construction I est alors un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant t_0 et $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution de problème de Cauchy étudié. Cette solution est clairement un maximum de l'ensemble des solutions ordonné par prolongement, d'où la conclusion. $\square$

Pour détecter si une solution d'un problème de Cauchy est ou n'est pas prolongeable, on dispose du résultat suivant :

Proposition 2.1.12. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue et soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. Supposons que $f(t, x)$ soit localement lipschitzienne par rapport à x sur Ω et que $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ soit une solution du problème de Cauchy*

$$x'(t) = f(t, x(t)); \qquad x(t_0) = x_0.$$

La solution φ est non-prolongeable si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $\alpha \leq \beta$ dans $]a, b[$ tels que

$$(t, \varphi(t)) \notin K$$

si $t \notin [\alpha, \beta]$.

Démonstration. Montrons que la condition est nécessaire. Supposons donc que φ soit non-prolongeable et que K soit un compact de Ω. Vu la Proposition 2.1.9, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)); \qquad x(t_1) = x_1$$

possède une unique solution ψ_1 sur $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[$ pour tout $(t_1, x_1) \in K$. Cela entraîne que $(t, \varphi(t)) \notin K$ si $t > b - \varepsilon$ (resp. si $t < a - \varepsilon$). En effet, s'il existait $t_1 > b - \varepsilon$ (resp. $t_1 < a - \varepsilon$) avec $(t_1, \varphi(t_1)) \in K$ alors la solution

$$\psi_1 :]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[$$

du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)); \qquad x(t_1) = \varphi(t_1)$$

coïnciderait avec φ sur $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[\cap]a, b[$. Cela permettrait de prolonger φ à $]a, b[\cup]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[\supset]a, b[$ en contradiction avec le caractère non-prolongeable de φ.

Montrons à présent que la condition est aussi suffisante. Supposons donc qu'elle soit satisfaite mais que φ soit prolongeable. Alors, il existe une solution

$$\psi :]c, d[\to \mathbb{R}^n$$

du problème considéré avec $c < a$ ou $d > b$ et telle que $\psi(t) = \varphi(t)$ si $t \in]a, b[$. Dans le premier cas

$$\{(t, \varphi(t)) : t \in]a, t_0]\}$$

est inclus dans le compact

$$\{(t, \psi(t)) : t \in [a, t_0]\}$$

de Ω et dans le second

$$\{(t, \varphi(t)) : t \in [t_0, b[\}$$

est inclus dans le compact

$$\{(t, \psi(t)) : t \in [t_0, b]\};$$

on aboutit donc dans chaque cas à une contradiction. □

Remarque 2.1.13. La preuve de la proposition précédente montre aussi que la solution φ est prolongeable si et seulement si

$$(t, \varphi(t))$$

converge vers un point de Ω pour $t \to a^+$ ou pour $t \to b^-$.

2.2 Théorèmes d'existence et d'unicité dans le cas linéaire

Définition 2.2.1. Un système normal d'équations différentielles du premier ordre sur un ouvert $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est dit *linéaire* s'il s'écrit sous la forme

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

où $A : I \to \mathbb{R}^n_n$ et $b : I \to \mathbb{R}^n$ sont des applications continues.

Remarque 2.2.2. Pour un système normal d'équations différentielles du premier ordre du type considéré dans la définition précédente, on a donc

$$f(t,x) = A(t)x + b(t)$$

pour tout $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que

$$|f(t,y) - f(t,x)| \leq \|A(t)\| \, |y - x|$$

pour tous (t,y), $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$. Cela montre que $f(t,x)$ est toujours localement lipschitzienne par rapport à x sur $I \times \mathbb{R}^n$. Comme $A : I \to \mathbb{R}^n_n$ est continu, cela montre même que $f(t,x)$ est lipschitzienne par rapport à x sur $J \times \mathbb{R}^n$ pour tout sous-intervalle relativement compact J de I.

On peut donc lui appliquer directement la proposition suivante :

Proposition 2.2.3. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue et soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Supposons que $f(t,x)$ soit lipschitzienne par rapport à x sur $J \times \mathbb{R}^n$ pour tout sous-intervalle relativement compact J de I. Alors la solution maximale du problème de Cauchy*

$$x'(t) = f(t, x(t)); \qquad x(t_0) = x_0$$

est définie sur I tout entier.

Démonstration. Pour toute application continue $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, définissons $\mathcal{T}(\varphi) : I \to \mathbb{R}^n$ en posant

$$\mathcal{T}(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) \, d\tau.$$

Il est alors clair que $\mathcal{T}(\varphi)$ est continu sur I. Soit J un sous-intervalle relativement compact de I. Vu nos hypothèses, il existe alors $L > 0$ pour lequel $f(t,x)$ est L-lipschitzienne sur $J \times \mathbb{R}^n$. Soient $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ des applications continues. En procédant comme dans la preuve du Lemme 2.1.3, on voit alors que

$$|\mathcal{T}(\psi)(t) - \mathcal{T}(\varphi)(t)| \leq L \int_{t_0}^{t} |\psi(\tau) - \varphi(\tau)| \, d\tau$$

si $t \in J$. Il s'ensuit que

$$|\mathcal{T}^m(\psi)(t) - \mathcal{T}^m(\varphi)(t)| \leq L^m \frac{|t-t_0|^m}{m!} \|\psi - \varphi\|_J$$

sur J pour tout $m \geq 0$. Comme dans la preuve du Lemme 2.1.3, construisons la suite $(\varphi_m)_{m\geq 0}$ de proche en proche en choisissant arbitrairement une application continue $\varphi_0 : J \to \mathbb{R}^n$ et en posant

$$\varphi_{m+1}(t) = \mathcal{T}(\varphi_m(t))$$

pour tout $m \geq 0$ et tout $t \in I$. Vu ce qui précède, on a

$$|\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t)| \leq L^m \frac{|t-t_0|^m}{m!} \|\varphi_1 - \varphi_0\|_J$$

pour tout $m \geq 0$ et tout $t \in J$. Il s'ensuit que

$$|\varphi_q(t) - \varphi_p(t)| \leq \sum_{m=p}^{q-1} L^m \frac{|t-t_0|^m}{m!} \|\varphi_1 - \varphi_0\|_J$$

si $q > p$ et si $t \in J$. Comme la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} L^m \frac{|t-t_0|^m}{m!}$$

converge vers $e^{L|t-t_0|}$ uniformément en t sur tout compact de $\mathbb{R}$, la majoration précédente montre que φ_m est uniformément de Cauchy sur J. Comme J est un sous-intervalle relativement compact arbitraire de I, cela montre que φ_m converge dans $C_0(I, \mathbb{R}^n)$ vers une fonction φ telle que

$$\mathcal{T}(\varphi) = \varphi.$$

Vu le Lemme 2.1.3, cette fonction φ est une solution du problème de Cauchy étudié sur I tout entier. □

Corollaire 2.2.4. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient*

$$A : I \to \mathbb{R}^n_n \qquad \text{et} \qquad b : I \to \mathbb{R}^n$$

deux applications continues et soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Alors la solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t); \qquad x(t_0) = x_0$$

est définie sur I tout entier.

Démonstration. Cela découle directement de la proposition précédente compte tenu de la Remarque 2.2.2. □

Montrons à présent qu'il est possible de ramener la résolution d'un système du type
$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$
à celle du système homogène
$$x'(t) = A(t)x(t)$$
qui lui est associé.

Définition 2.2.5. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $t_0 \in I$ et soit
$$A : I \to \mathbb{R}^n_n$$
une application continue. Vu ce qui précède, nous savons que pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une et une seule solution $\varphi_j : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy
$$x'(t) = A(t)x(t); \qquad x(t_0) = e_j.$$
On peut donc considérer la matrice
$$\Phi_A(t; t_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{pmatrix}.$$
On dit que $\Phi_A(t; t_0)$ est la *solution matricielle fondamentale du système*
$$x'(t) = A(t)x(t)$$
associée à t_0.

Remarque 2.2.6. Par construction, on a
$$\frac{\partial \Phi_A(t; t_0)}{\partial t} = A(t)\Phi_A(t; t_0)$$
pour tout $t \in I$ et
$$\Phi_A(t_0; t_0) = I_n$$
et ces deux conditions caractérisent la fonction matricielle
$$t \mapsto \Phi_A(t; t_0).$$

Exemples 2.2.7. Il est en général assez difficile de calculer la matrice
$$\Phi_A(t; t_0).$$
On peut cependant le faire assez simplement dans les deux cas particuliers suivants :

(a) Si $n = 1$ alors $A = (a)$ et on vérifie aisément par dérivation que

$$\Phi_A(t;t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}.$$

(b) Si la fonction matricielle A est constante, alors l'étude de l'exponentielle matricielle effectuée dans le Chapitre 1 montre que

$$\Phi_A(t;t_0) = e^{(t-t_0)A}.$$

Proposition 2.2.8. *Dans les conditions de la Définition 2.2.5 la solution maximale du problème de Cauchy*

$$x'(t) = A(t)x(t); \qquad x(t_0) = x_0$$

est donnée par la formule

$$\varphi(t) = \Phi_A(t;t_0)x_0.$$

En particulier, les colonnes de $\Phi_A(t;t_0)$ fournissent une base du sous-espace vectoriel de $C_1(I;\mathbb{R}^n)$ formé par les solutions du système

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

et la matrice

$$\Phi_A(t_1;t_0)$$

est non singulière pour tout $t_1 \in I$.

Démonstration. Vu la remarque ci-dessus, si $\varphi(t) = \Phi_A(t;t_0)x_0$, on a

$$\varphi'(t) = \frac{\partial \Phi_A(t;t_0)}{\partial t}x_0 = A(t)\Phi_A(t;t_0)x_0 = A(t)\varphi(t)$$

et

$$\varphi(t_0) = \Phi_A(t_0;t_0)x_0 = x_0.$$

Cela montre que $\varphi(t)$ est bien la solution maximale du problème de Cauchy considéré. On en tire que toute solution φ du système homogène

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{*}$$

sur I est égale à $\Phi_A(t;t_0)x_0$ pour $x_0 = \varphi(t_0)$. Cela montre que les colonnes de $\Phi_A(t;t_0)$ engendrent l'espace des solutions de (*). Comme $\Phi_A(t_0;t_0) = I$, ces colonnes sont aussi linéairement indépendantes sur I. Soit $t_1 \in I$ et x_0 tels que

$$\Phi_A(t_1;t_0)x_0 = 0.$$

Alors $\Phi_A(t;t_0)x_0$ est une solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = A(t)x(t); \qquad x(t_1) = 0$$

sur I. Comme ce problème admet aussi la solution identiquement nulle, on a

$$\Phi_A(t;t_0)x_0 = 0$$

pour tout $t \in I$. Il s'ensuit que

$$x_0 = \Phi_A(t_0;t_0)x_0 = 0.$$

Ce raisonnement montre que la matrice

$$\Phi_A(t_1;t_0)$$

est non-singulière quelque soit $t_1 \in I$. □

Remarques 2.2.9. (a) Comme

$$\Phi_A(t;t_0)^{-1}\Phi_A(t;t_0) = I_n$$

pour tout $t \in I$, on a aussi

$$\frac{\partial \Phi_A(t;t_0)^{-1}}{\partial t}\Phi_A(t;t_0) + \Phi_A(t;t_0)^{-1}\frac{\partial \Phi_A(t;t_0)}{\partial t} = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial \Phi_A(t;t_0)^{-1}}{\partial t} = -\Phi_A(t;t_0)^{-1}A(t)$$

pour tout $t \in I$. En particulier,

$$\Phi_A(t;t_0)^{-1} = \widetilde{\Phi_{-\tilde{A}}(t;t_0)}$$

pour tout $t \in I$.

(b) Définissons le Wronskien du système (*) associé à t_0 par la formule

$$W_A(t;t_0) = \det \Phi_A(t;t_0).$$

Notons $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ les colonnes de $\widetilde{\Phi_A(t;t_0)}$. Comme

$$W_A(t;t_0) = \det \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & \cdots & \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

on voit que

$$\frac{\partial W_A(t;t_0)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & \cdots & \gamma_j'(t) & \cdots & \gamma_n(t) \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\gamma_j'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\gamma_k(t)$$

puisque

$$\begin{pmatrix}\gamma_1'(t) & \cdots & \gamma_n'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_1(t) & \cdots & \gamma_n(t)\end{pmatrix} \tilde{A}(t).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_A(t;t_0)}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(t) \det \begin{pmatrix}\gamma_1(t) & \cdots & \gamma_j(t) & \cdots & \gamma_n(t)\end{pmatrix} \\ &= [\operatorname{tr} A(t)] W_A(t;t_0).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$W_A(t;t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau}.$$

Proposition 2.2.10 (Variation des constantes)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $t_0 \in I$ et soient*

$$A : I \to \mathbb{R}^n_n \qquad et \qquad b : I \to \mathbb{R}^n$$

deux applications continues. Alors la solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t); \qquad x(t_0) = x_0$$

est donnée par la formule

$$\varphi(t) = \Phi_A(t;t_0)C(t)$$

où

$$C(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_A(\tau;t_0)^{-1} b(\tau)\, d\tau.$$

Démonstration. Si $\varphi(t)$ et $C(t)$ sont donnés par les formules de l'énoncé alors il s'agit de fonctions de classe C_1 et on a

$$C'(t) = \Phi(t;t_0)^{-1} b(t); \qquad C(t_0) = x_0$$

et

$$\varphi'(t) = A(t)\Phi_A(t;t_0)C(t) + \Phi_A(t;t_0)C'(t); \qquad \varphi(t_0) = C(t_0).$$

Il s'ensuit que l'on a

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t); \qquad \varphi(t_0) = x_0$$

d'où la conclusion. □

2.3 Dépendance en les conditions initiales dans le cas général

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue pour laquelle $f(t,x)$ est localement lipschitzienne par rapport à x sur Ω. Soit également

$$t \mapsto \varphi(t; t_0, x_0)$$

la solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)); \qquad x(t_0) = x_0$$

associée à $(t_0, x_0) \in \Omega$ et soit $I_{(t_0,x_0)}$ son intervalle ouvert de définition. Notre but dans cette section est de comprendre comment

$$\varphi(t; t_0, x_0)$$

varie lorsque (t_0, x_0) varie dans Ω. Pour cela, nous aurons besoin des quelques lemmes suivants :

Lemme 2.3.1 (Gronwall)**.** *Soient a, b, ψ des fonctions réelles continues sur $]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$ et soient $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que a soit positif sur $[t_0, \beta[$ et que sur cet intervalle on ait*

$$\psi(t) \leq x_0 + \int_{t_0}^{t} [a(\tau)\psi(\tau) + b(\tau)] \; d\tau.$$

Alors ψ est majoré par la solution φ du problème de Cauchy

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t); \qquad x(t_0) = x_0$$

sur $[t_0, \beta[$.

Démonstration. Vu la preuve de la Proposition 2.2.3, on sait que φ est la limite sur $]\alpha, \beta[$ de la suite φ_m définie de proche en proche en posant

$$\varphi_0(t) = \psi(t)$$

$$\varphi_{m+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [a(\tau)\varphi_m(\tau) + b(\tau)] \; d\tau$$

pour tout $t \in]\alpha, \beta[$ et tout $m \geq 0$. Comme a est positif sur I, un raisonnement par récurrence montre alors que

$$\varphi_m \leq \psi$$

sur $[t_0, \beta[$ pour tout $m \geq 0$. La conclusion est alors immédiate. $\square$

Lemme 2.3.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Supposons que $f(t,x)$ soit localement lipschitzienne par rapport à x sur Ω et que $(t_0, x_0) \in \Omega$. Notons $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ une solution du système*

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

et soient α, β deux points de $]a,b[$ tels que $\alpha < \beta$. Alors il existe un $\gamma > 0$ tel que

$$K = \{(t,x) : \alpha \leq t \leq \beta, \quad |x - \varphi(t)| \leq \gamma\}$$

soit un compact de Ω et $\delta > 0$ inférieur à γ tel que si

$$V = \{(t,x) : \alpha < t < \beta, |x - \varphi(t)| < \delta\}$$

et si $\varphi_0 :]a_0, b_0[\to \mathbb{R}^n$ est la solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)); \qquad x'(t_0) = x_0$$

associé à $(t_0, x_0) \in V$ alors $]a_0, b_0[\supset [\alpha, \beta]$ et

$$(t, \varphi_0(t)) \in K$$

pour tout $t \in [\alpha, \beta]$.

Démonstration. Comme

$$\{(t, \varphi(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$$

est un compact de Ω on sait déjà qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$K = \{(t,x) : \alpha \leq t \leq \beta, |x - \varphi(t)| \leq \gamma\}$$

soit un compact de Ω. Il existe alors $L > 0$ tel que

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$$

pour tous (t, x_1), (t, x_2) dans K. Choisissons $\delta > 0$ de sorte que

$$\delta < \gamma e^{-L(\beta - \alpha)}$$

et considérons $(t_0, x_0) \in V$. Notons $\varphi_0 :]a_0, b_0[\to \mathbb{R}^n$ la solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)); \qquad x(t_0) = x_0.$$

Alors $(t_0, x_0) \in K$ et la Proposition 2.1.12 montre que les bornes

$$\alpha_0 = \sup\{t \in]a_0, t_0] : (t, \varphi_0(t)) \notin K\}$$

et

$$\beta_0 = \inf\{t \in [t_0, b_0[\, : (t, \varphi_0(t)) \notin K\}$$

sont finies et que $a_0 < \alpha_0 < t_0 < \beta_0 < b_0$. Par construction, on sait que $(t, \varphi_0(t)) \in K$ si $t \in [\alpha_0, \beta_0]$. Il s'ensuit que $[\alpha_0, \beta_0] \subset [\alpha, \beta]$ et que l'on a

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

et

$$\varphi_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_0(\tau))\, d\tau$$

si $t \in [\alpha_0, \beta_0]$. Ainsi,

$$|\varphi(t) - \varphi_0(t)| \leq |\varphi(t_0) - x_0| + L \int_{[t_0,t]} |\varphi(\tau) - \varphi_0(\tau)|\, d\tau$$

si $t \in [\alpha_0, \beta_0]$. Du Lemme 2.3.1, on tire alors que

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi_0(t)| &\leq |\varphi(t_0) - x_0| e^{L|t-t_0|} \\ &< \delta e^{L(\beta-\alpha)} \\ &< \gamma \end{aligned}$$

si $t \in [\alpha_0, \beta_0]$. Si $\alpha_0 > \alpha$ ou si $\beta_0 < \beta$ il en résulte que $(\alpha_0, \varphi_0(\alpha_0))$ ou que $(\beta_0, \varphi_0(\beta_0))$ sont des points intérieurs à K en contradiction avec la définition de α_0 ou de β_0. Cela montre que $\alpha_0 = \alpha$ et que $\beta_0 = \beta$; d'où la conclusion. □

Lemme 2.3.3. *Dans les conditions du lemme précédent, l'application*

$$(t; t_0, x_0) \mapsto \varphi(t; t_0, x_0)$$

est dérivable par rapport à t et lipschitzienne sur $]\alpha, \beta[\times V$ et

$$(t; t_0, x_0) \mapsto \frac{\partial \varphi(t; t_0, x_0)}{\partial t}$$

est lipschitzienne par rapport à (t_0, x_0) et continue sur ce même ouvert.

Démonstration. Soient (t_1, x_1) et (t_2, x_2) dans V et soient $\varphi_1(t) = \varphi(t; t_1, x_1)$ et $\varphi_2(t) = \varphi(t; t_2, x_2)$. Vu ce qui précède, on sait que φ_1 et φ_2 sont définis sur $]\alpha, \beta[$ et on a $(t, \varphi_1(t)) \in K$ et $(t, \varphi_2(t)) \in K$ si $t \in]\alpha, \beta[$ et que l'on a

$$\varphi_1(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(\tau, \varphi_1(\tau))\, d\tau$$

et
$$\varphi_2(t) = x_2 + \int_{t_2}^{t} f(\tau, \varphi_2(\tau))\, d\tau$$
sur cet intervalle. Il s'ensuit que
$$\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = x_2 - x_1 - \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, \varphi_2(\tau))\, d\tau + \int_{t_1}^{t} [f(\tau, \varphi_2(t)) - f(\tau, \varphi_1(t))]\, d\tau$$
et que
$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| \leq |x_2 - x_1| + M|t_2 - t_1| + L \int_{t_1}^{t} |\varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau)|\, d\tau$$
si $t \in \,]\alpha, \beta[$ et si M désigne la borne supérieure de $|f|$ sur K. Le Lemme 2.3.1 montre alors que
$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| \leq (|x_2 - x_1| + M|t_2 - t_1|)e^{L|t-t_1|}$$
pour tout $t \in \,]\alpha, \beta[$. Soient maintenant $\tau_1, \tau_2 \in \,]\alpha, \beta[$. De la relation
$$\begin{aligned}\varphi_2(\tau_2) - \varphi_1(\tau_1) &= \varphi_2(\tau_2) - \varphi_2(\tau_1) + \varphi_2(\tau_1) - \varphi_1(\tau_1) \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau, \varphi_2(\tau))\, d\tau + \varphi_2(\tau_1) - \varphi_1(\tau_1)\end{aligned}$$
et de la majoration précédente, on déduit que
$$\begin{aligned}|\varphi_2(\tau_2) - \varphi_1(\tau_1)| &\leq |\tau_2 - \tau_1|M + (|x_2 - x_1| + M|t_2 - t_1|)e^{L(\beta-\alpha)} \\ &\leq \left[M + (1 + M)e^{L(\beta-\alpha)}\right] |(\tau_2; t_2, x_2) - (\tau_1; t_1, x_1)|.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'application
$$(t; t_0, x_0) \mapsto \varphi(t; t_0, x_0)$$
est lipschitzienne sur $]\alpha, \beta[\times V$. Pour conclure, il suffit alors de remarquer que
$$\frac{\partial \varphi(t; t_0, x_0)}{\partial t} = f(t, \varphi(t; t_0, x_0)).$$
□

Proposition 2.3.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Supposons que $f(t, x)$ soit localement lipschitzienne par rapport à x sur Ω. Alors :*

(a) L'ensemble
$$D = \{(t; t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in I_{(t_0,x_0)}\}$$
est un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

(b) *L'application*

$$(t; t_0, x_0) \mapsto \varphi(t; t_0, x_0)$$

est dérivable par rapport à t et localement lipschitzienne sur D.

(c) *L'application*

$$(t; t_0, x_0) \mapsto \frac{\partial \varphi(t; t_0, x_0)}{\partial t}$$

est localement lipschitzienne par rapport à (t_0, x_0) et continue sur D.

Démonstration. Cela résulte directement des deux lemmes précédents. □

Corollaire 2.3.5. *Plaçons-nous dans les conditions de la proposition précédente et fixons t_0 et $t_1 \in \mathbb{R}$. Posons*

$$U_{(t_1,t_0)} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : (t_1; t_0, x_0) \in D\},$$

$$U_{(t_0,t_1)} = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : (t_0; t_1, x_1) \in D\}$$

et

$$\varphi_{(t_1,t_0)}(x_0) = \varphi(t_1; t_0, x_0).$$

Alors,

$$\varphi_{(t_1,t_0)} : U_{(t_1,t_0)} \to U_{(t_0,t_1)}$$

est une bijection continue et localement lipschitzienne dont la réciproque est continue, localement lipschitzienne et donnée par

$$\varphi_{(t_0,t_1)} : U_{(t_0,t_1)} \to U_{(t_1,t_0)}.$$

Démonstration. Il est clair que

$$x_1 = \varphi(t_1; t_0, x_0)$$

est bien défini pour tout $x_0 \in U_{(t_1,t_0)}$. Par définition,

$$t \mapsto \varphi(t; t_0, x_0)$$

est une solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)); \qquad x(t_0) = x_0$$

sur $I_{(t_0,x_0)}$. Comme $t_1 \in I_{(t_0,x_0)}$, c'est aussi une solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)); \qquad x(t_1) = x_1$$

sur ce même intervalle. Il s'ensuit que $I_{(t_1,x_1)} \supset I_{(t_0,x_0)}$ et que

$$\varphi(t;t_1,x_1) = \varphi(t;t_0,x_0)$$

si $t \in I_{(t_0,x_0)}$. Cela montre que $x_1 \in U_{(t_0,t_1)}$ et que

$$\varphi(t_0;t_1,x_1) = x_1.$$

La conclusion s'obtient alors en reproduisant le même raisonnement après avoir échangé t_0 et t_1. □

Corollaire 2.3.6. *Plaçons nous dans les conditions du corollaire précédent et supposons que $t_0 < t_1 < t_2$. Alors, on a*

$$U_{(t_2,t_0)} = U_{(t_1,t_0)} \cap \varphi^{-1}_{(t_1,t_0)}(U_{(t_2,t_1)};$$

et

$$\varphi_{(t_2,t_0)} = \varphi_{(t_2,t_1)} \circ \varphi_{(t_1,t_0)}$$

sur $U_{(t_2,t_0)}$.

Démonstration. Il suffit de procéder comme dans la preuve du corollaire précédent. □

2.4 Dépendance en les conditions initiales dans le cas C_1

La Proposition 2.3.4 est bien sûr applicable lorsque $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continu et continûment dérivable par rapport à x sur Ω. Cependant, dans ce cas, il est naturel d'espérer que la fonction

$$\varphi(t;t_0,x_0)$$

ne soit pas que localement lipschitzienne et dérivable par rapport à t sur Ω mais qu'elle soit en fait continûment dérivable par rapport à toutes ses variables. Si c'est le cas, il découle du fait que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t;t_0,x_0) = f(t,\varphi(t;t_0,x_0))$$
$$\varphi(t_0;t_0,x_0) = x_0$$

pour tout $t \in I_{(t_0,x_0)}$ que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t;t_0,x_0)$$

est alors continûment dérivable par rapport à (t_0,x_0) sur D et que l'on a

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_0\partial t}(t;t_0,x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t;t_0,x_0))\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t;t_0,x_0)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t_0;t_0,x_0)+\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t_0;t_0,x_0)=0$$

et

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0\partial t}(t;t_0,x_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t;t_0,x_0))\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t;t_0,x_0)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t_0;t_0,x_0)=I_n$$

pour tout $(t;t_0,x_0)\in D$. Si nous supposons de plus que les fonctions

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial t_0}\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x_0}$$

sont également continus sur D, alors il découle de ce qui précède que l'on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t;t_0,x_0)=-\psi(t;t_0,x_0)f(t_0,x_0)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t;t_0,x_0)=\psi(t;t_0,x_0)$$

si $\psi(t;t_0,x_0)$ désigne l'unique solution du problème de Cauchy matriciel

$$M'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(t;\varphi(t;t_0,x_0))M(t)$$
$$M(t_0)=I_n$$

sur $I_{(t_0,x_0)}$. On est donc assez naturellement amené au résultat suivant :

Proposition 2.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et soit $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ une application continue. Supposons que $f(t,x)$ soit continûment dérivable par rapport x sur Ω. Soit*

$$t\mapsto\varphi(t;t_0,x_0)$$

la solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t)=f(t,x(t));\quad x(t_0)=x_0$$

et soit $I_{(t_0,x_0)}$ son intervalle de définition. Soit également

$$t\mapsto\psi(t;t_0,x_0)$$

la solution du problème de Cauchy matriciel

$$M'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t;t_0,x_0))M(t)$$
$$M(t_0)=I_n$$

sur $I_{(t_0,x_0)}$. *Alors* φ *est continûment dérivable sur*

$$D = \{(t; t_0, x_0) : (t_0, x_0) \in \Omega, t \in I_{(t_0,x_0)}\}$$

et on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t; t_0, x_0) = -\psi(t; t_0, x_0) f(t_0, x_0)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t; t_0, x_0) = \psi(t; t_0, x_0)$$

sur cet ensemble. De plus, les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial t_0}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_0}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_0 \partial t}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0 \partial t}$$

existent et sont continues sur D *et on a par conséquent*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial t_0} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_0 \partial t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_0} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0 \partial t}$$

sur cet ensemble.

Démonstration. Plaçons-nous dans les conditions du Lemme 2.3.2 et choisissons $\rho > 0$ pour que

$$B((t_0, x_0), \rho) \subset V.$$

Vu nos hypothèses, nous pouvons supposer que

$$L = \sup_K \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|.$$

Pour alléger les notations, posons

$$\psi_0(t) = \psi(t; t_0, x_0) \qquad \text{et} \qquad \varphi_0(t) = \varphi(t; t_0, x_0)$$

pour tout $t \in I_{(t_0,x_0)}$ et

$$\varphi_1(t) = \varphi(t; t_1, x_1)$$

pour tout $t \in I_{(t_1,x_1)}$. Fixons $(t_1, x_1) \in B((t_0, x_0), \rho)$, $t_0, t_1 \in]\alpha, \beta[$. Par construction, φ_0, φ_1 sont de classe C_1 sur $]\alpha, \beta[$ et on a

$$\varphi_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_0(\tau))\, d\tau$$
$$\varphi_1(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(\tau, \varphi_1(\tau))\, d\tau$$

sur $]\alpha, \beta[$. De plus, on a aussi

$$\psi_0(t) = I_n + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi_0(\tau))\psi_0(\tau)\, d\tau$$

sur ce même intervalle. Posons

$$e(t) = \varphi_1(t) - \varphi_0(t) + \psi_0(t) f(t_0, x_0)(t_1 - t_0) - \psi_0(t)(x_1 - x_0)$$

pour tout $t \in]\alpha, \beta[$. Vu ce qui précède, un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} e(t) = &- \int_{t_0}^{t_1} [f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(t_0, x_0)]\ d\tau \\ &+ \int_{t_0}^{t} \left[f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_0(\tau))) - \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi_0(\tau))(\varphi_1(\tau) - \varphi_0(\tau)) \right]\ d\tau \\ &+ \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi_0(\tau)) e(\tau)\ d\tau. \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction

$$(\tau; t_1, x_1) \mapsto f(\tau, \varphi(\tau; t_1, x_1))$$

est continue sur D, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(t_0, x_0)| \leq \varepsilon$$

si $|\tau - t_0| \leq \eta$, $|t_1 - t_0| \leq \eta$, $|x_1 - x_0| \leq \eta$. Quitte à diminuer ρ, on peut donc supposer que

$$|f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(t_0, x_0)| \leq \varepsilon$$

pour tout $\tau \in [t_0, t_1]$. Puisque

$$\begin{aligned} f(t, y_2) - f(t, y_1) &- \frac{\partial f}{\partial x}(t, y_1)(y_2 - y_1) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, y_1 + s(y_2 - y_1)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, y_1) \right) (y_2 - y_1)\ ds \end{aligned}$$

pour tout $(t, y_1), (t, y_2) \in K$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est uniformément continu sur K, il est clair qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\left| f(t, y_2) - f(t, y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, y_1)(y_2 - y_1) \right| \leq \varepsilon |y_2 - y_1|$$

si (t, y_1) et $(t, y_2) \in K$ et sont tels que $|y_2 - y_1| \leq \eta$. Comme

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \leq (|x_1 - x_0| + M|t_1 - t_0|)e^{L(\beta-\alpha)}$$

si $t \in]\alpha, \beta[$, on peut donc, quitte à diminuer ρ, supposer que

$$\begin{aligned} &\left| f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_0(\tau)) - \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi_0(\tau))(\varphi_1(\tau) - \varphi_0(\tau)) \right| \\ &\qquad \leq \varepsilon |\varphi_1(\tau) - \varphi_0(\tau)| \\ &\qquad \leq \varepsilon (|x_1 - x_0| + M|t_1 - t_0|)e^{L(\beta-\alpha)} \end{aligned}$$

si $\tau \in]\alpha, \beta[$. Dans ces conditions, on voit que

$$|e(t)| \leq \varepsilon |t_1 - t_0| + \varepsilon (|x_1 - x_0| + M|t_1 - t_0|)e^{L(\beta-\alpha)}(\beta - \alpha) + L \int_{[t_0,t_1]} |e(\tau)| \, d\tau$$

pour tout $t \in]\alpha, \beta[$ et par conséquent que

$$|e(t)| \leq \varepsilon \left(1 + (1 + M)e^{L(\beta-\alpha)}(\beta - \alpha)\right) e^{L(\beta-\alpha)} |(t_1, x_1) - (t_0, x_0)|$$

si $t \in]\alpha, \beta[$. Comme $[\alpha, \beta]$ est un sous-intervalle arbitraire de $]a_0, b_0[$, cela montre que

$$(t; t_0, x_0) \mapsto \varphi(t; t_0, x_0)$$

est différentiable par rapport à (t_0, x_0) sur D et que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t; t_0, x_0) = -\psi_0(t) f(t_0, x_0)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t; t_0, x_0) = \psi_0(t).$$

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que la loi

$$(t; t_0, x_0) \mapsto \psi(t; t_0, x_0)$$

est continue sur D en utilisant le lemme ci-dessous. □

Lemme 2.4.2. *Soient*

$$A_0 :]a, b[\to \mathbb{R}^n_n \qquad et \qquad A_1 :]a, b[\to \mathbb{R}^n_n$$

deux applications continues et soit $t_0 \in]a, b[$. *Supposons que*

$$M_0 :]a, b[\to \mathbb{R}^n_n \qquad et \qquad M_1 :]a, b[\to \mathbb{R}^n_n$$

soient des fonctions matricielles de classe C_1 telles que

$$M_0' = A_0 M_0 \qquad M_1' = A_1 M_1$$

sur $]a,b[$*. Alors, on a*

$$\begin{aligned}&\|M_1 - M_0\|_{[\alpha,\beta]}\\ &\quad \leq \Big(\|M_1(t_0) - M_0(t_0)\| + \|A_1 - A_0\|_{[\alpha,\beta]} \|M_0\|_{[\alpha,\beta]} (\beta - \alpha)\Big) e^{\|A_1\|_{[\alpha,\beta]}(\beta-\alpha)}\end{aligned}$$

pour tout sous-intervalle compact $[\alpha,\beta]$ *de* $]a,b[$ *contenant* t_0*. En particulier,*

$$M_1 \to M_0$$

dans $C_1(]a,b[\,;\mathbb{R}^n_n)$ *si* $M_1(t_0) \to M_0(t_0)$ *dans* $\mathbb{R}^n_n$ *et si* $A_1 \to A_0$ *dans* $C_0(]a,b[\,;\mathbb{R}^n_n)$*.*

Démonstration. Soit $[\alpha,\beta]$ un intervalle compact de $]a,b[$ contenant t_0. On a

$$(M_1 - M_0)' = A_1 M_1 - A_0 M_0 = A_1(M_1 - M_0) + (A_1 - A_0) M_0$$

sur $]a,b[$. Donc,

$$\begin{aligned}M_1(t) - M_0(t) = M_1(t_0) - M_0(t_0) &+ \int_{t_0}^{t} A_1(\tau)(M_1(\tau) - M_0(\tau))\, d\tau\\ &+ \int_{t_0}^{t} (A_1(\tau) - A_0(\tau)) M_0(\tau) d\tau\end{aligned}$$

pour tout $t \in\,]a,b[$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\|M_1(t) - M_0(t)\| \leq \|M_1(t_0) - M_0(t_0)\| &+ \|A_1 - A_0\|_{[\alpha,\beta]} \|M_0\|_{[\alpha,\beta]} (\beta - \alpha)\\ &+ \|A_1\|_{[\alpha,\beta]} \int_{[t_0,t]} \|M_1(\tau) - M_0(\tau)\|\; d\tau\end{aligned}$$

pour tout $t \in\,]\alpha,\beta[$. Vu le Lemme de Gronwall, on en tire que

$$\begin{aligned}&\|M_1(t) - M_0(t)\|\\ &\quad \leq \Big(\|M_1(t_0) - M_0(t_0)\| + \|A_1 - A_0\|_{[\alpha,\beta]} \|M_0\|_{[\alpha,\beta]} (\beta - \alpha)\Big) e^{\|A_1\|_{[\alpha,\beta]}(t-t_0)}\end{aligned}$$

pour tout $t \in [\alpha,\beta]$; ce qui permet de conclure. □

2.5 Application au redressement des champs de vecteurs

Proposition 2.5.1. *Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C_1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et soit x_0, un point de U tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors, il existe un difféomorphisme $\chi : V \to \underline{V}$ d'un voisinage ouvert V de x_0 dans U sur un voisinage ouvert $\underline{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ qui transforme le champs f en le champs constant e_1.*

Démonstration. Quitte à translater le problème et à permuter les variables, nous pouvons supposer que $x_0 = 0$ et que $f_1(x_0) \neq 0$. Considérons le système différentiel autonome

$$x'(t) = f(x(t))$$

associé à f et gardons les notations introduites dans les sections précédentes. Vu nos hypohèses, la fonction

$$(t; t_0, x_0) \mapsto \varphi(t; t_0, x_0)$$

est de classe C_1 sur l'ouvert D. Cela étant, il est clair que la relation

$$\underline{\chi}(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}_1; 0, (0, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n))$$

définit une application de classe C_1 d'un voisinage $\underline{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ dans U et que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial \underline{x}_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}_1; 0, (0, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)) \\ &= f(\varphi(\underline{x}_1; 0, (0, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n))) \end{aligned} \tag{*}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial \underline{x}_j} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(\underline{x}_1; 0, (0, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n))e_j \\ &= \psi(\underline{x}_1; 0, (0, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n))e_j \end{aligned} \tag{**}$$

pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$. Il s'ensuit que

$$\frac{\partial \underline{\chi}}{\partial \underline{x}}(0) = (f(0)\ e_2\ \dots\ e_n).$$

et que

$$\det \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial \underline{x}}(0) = f_1(0) \neq 0.$$

Le théorème d'inversion locale montre alors que, quitte à remplacer $\underline{V}$ par un voisinage ouvert de 0 plus petit, on peut supposer que $V = \underline{\chi}(\underline{V})$ est un voisinage ouvert de 0 dans Ω et que $\chi : V \to \underline{V}$ est un difféomorphisme de classe C_1. L'image du champ f par $\chi = \underline{\chi}^{-1}$ est alors le champ

$$\underline{x} \mapsto \frac{\partial \chi}{\partial x}(\underline{\chi}(\underline{x})f(\underline{\chi}(\underline{x}).$$

Comme

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} \circ \underline{\chi} = \left(\frac{\partial \underline{\chi}}{\partial \underline{x}}\right)^{-1}$$

sur $\underline{V}$, cette image sera égale au champ constant e_1 sur V si et seulement si on a

$$\frac{\partial \underline{\chi}}{\partial \underline{x}} e_1 = f \circ \underline{\chi}$$

sur $\underline{V}$. La conclusion résulte donc de (*). □

2.6 Méthode d'Euler

Proposition 2.6.1. *Soit* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *et soit*

$$\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}^n$$

la solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)); \quad x(t_0) = x_0.$$

Supposons que $[t_0, t_0 + H] \subset]a, b[$ *pour un* $H > 0$*. Fixons* $M \in \mathbb{N}_0$ *et posons* $h = H/M$*. Posons également* $t_m = t_0 + mh$ *et* $x_m = \varphi(t_m)$ *pour tout* $m \in \{0, \ldots, M\}$*. Alors, pour* M *suffisamment grand la relation de récurrence*

$$\underline{x}_{m+1} = \underline{x}_m + hf(t_m, \underline{x}_m)$$

jointe à la condition initiale $\underline{x}_0 = x_0$ *définit une suite finie* $(\underline{x}_m)_{m \in \{0,\ldots,M\}}$ *telle que*

$$(t_m, \underline{x}_m) \in \Omega$$

pour tout $m \in \{0, \ldots, M\}$*. De plus, si on pose*

$$\underline{\varphi}(h, t) = \underline{x}_m + (t - t_m) f(t_m, \underline{x}_m)$$

pour tout $t \in [t_m, t_{m+1}]$ *et tout* $m \in \{0, \ldots, M - 1\}$*, alors*

$$t \mapsto \underline{\varphi}(h, t)$$

est une fonction affine par morceaux sur $[t_0, t_0 + H]$ *et*

$$\underline{\varphi}(h, t) \to \varphi(t)$$

uniformément en t *sur* $[t_0, t_0 + H]$ *si* $h \to 0$*.*

Démonstration. Comme

$$\{(t, \varphi(t)) : t \in [t_0, t_0 + H]\}$$

est un compact de Ω, il existe $\delta > 0$ tel que

$$K = \{(t, x) : t \in [t_0, t_0 + H], |x - \varphi(t)| \leq \delta\}$$

soit un compact de Ω. Puisque $f(t, x)$ est localement lipschitzien par rapport à x sur Ω, il existe alors $L > 0$ tel que

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$$

si (t, x_1) et (t, x_2) sont dans K. Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons η_ε suffisamment petit pour que

$$|f(\tau_2, \varphi(\tau_2)) - f(\tau_1, \varphi(\tau_1))| \leq \varepsilon$$

si $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, t_0 + H]$ sont tels que $|\tau_2 - \tau_1| \leq \eta_\varepsilon$. (C'est possible car $f(\tau, \varphi(\tau))$ est continue et donc uniformément continue sur le compact $[t_0, t_0 + H]$).

Soit $m < M$. Supposons que $(t_k, \underline{x}_k)$ soit bien défini et appartienne à K pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$. Si $k \in \{0, \ldots, m\}$ et si $t \in [t_k, t_{k+1}]$, on a alors

$$\underline{\varphi}(t,h) - \varphi(t) = \underline{x}_k - x_k + h(f(t_k, \underline{x}_k) - f(t_k, x_k)) + \int_{t_k}^{t} [f(t_k, \varphi(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))] \, d\tau$$

et par conséquent

$$\left|\underline{\varphi}(t,h) - \varphi(t)\right| \leq (1 + Lh)|\underline{x}_k - x_k| + h\varepsilon.$$

Il s'ensuit que

$$\left|\underline{x}_{k+1} - x_{k+1}\right| \leq (1 + Lh)|\underline{x}_k - x_k| + h\varepsilon$$

si $k \in \{0, \ldots, m\}$. Le lemme ci-dessous montre alors que

$$|\underline{x}_k - x_k| \leq \frac{(1 + Lh)^k - 1}{Lh} h\varepsilon \leq \frac{e^{Lhk} - 1}{L}\varepsilon$$

pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$. Il s'ensuit que si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit et si $h < \eta_\varepsilon$, alors $\underline{x}_m$ est bien défini pour tout $m \in \{0, \ldots, M\}$ et

$$|\underline{\varphi}(t,h) - \varphi(t)| \leq \frac{e^{LH} - 1}{L}\varepsilon$$

sur $[t_0, t_0 + H]$. Comme $\varepsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, cela montre que,

$$\underline{\varphi}(t,h) \to \varphi(t)$$

uniformément en $t \in [t_0, t_0 + H]$ si $h \to 0$. □

Lemme 2.6.2 (Gronwall à coefficients constants, cas discret). *Soient a, $b \in \mathbb{R}$ et soit $(\psi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Supposons que $a > 0$ et que*

$$\psi_{m+1} \leq a\psi_m + b$$

pour tout $m \geq 0$. Alors

$$\psi_m \leq \frac{a^m - 1}{a - 1} b + a^m \psi_0$$

si $a \neq 1$ et

$$\psi_m \leq mb + \psi_0$$

si $a = 1$.

Démonstration. Traitons le cas $a \neq 1$ (le cas $a = 1$ s'obtient de manière similaire). Comme $a^0 = 1$, on a bien sûr

$$\psi_0 \leq \frac{a^0 - 1}{a - 1} b + a^0 \psi_0.$$

Supposons donc que

$$\psi_m \leq \frac{a^m - 1}{a - 1} b + a^m \psi_0.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} a\psi_m + b &\leq a\frac{a^m - 1}{a - 1} b + a^{m+1}\psi_0 + b \\ &\leq \frac{a^{m+1} - a + a - 1}{a - 1} b + a^{m+1}\psi_0 \\ &\leq \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1} b + a^{m+1}\psi_0 \end{aligned}$$

et comme $\psi_{m+1} \leq a\psi_m + b$ on a aussi

$$\psi_{m+1} \leq \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1} b + a^{m+1}\psi_0$$

d'où la conclusion. □

2.7 Méthodes à pas simple

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Supposons que $f(t, x)$ soit localement lipschitzien par rapport à x sur Ω, considérons le système différentiel

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{*}$$

et notons comme d'habitude

$$t \mapsto \varphi(t; t_0, x_0) \qquad (t \in I_{(t_0, x_0)})$$

la solution maximale du problème de Cauchy associé à (*) et à la condition initiale

$$x(t_0) = x_0$$

correspondant à $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Définition 2.7.1. On appelle *méthode à pas simple consistante* pour la résolution approchée de (*) toute méthode fournissant une valeur approchée

$$\underline{x}_1(h, t_0, x_0)$$

de $\varphi(t_0+h;t_0,x_0)$ pour tout $(t_0,x_0)\in\Omega$ et tout pas $h\in\mathbb{R}$ de module suffisamment petit et cela de telle sorte que

$$\underline{x}_1(h,t_0,x_0)-\varphi(t_0+h;t_0,x_0)=o(h)$$

pour $h\to 0$ si $(t_0,x_0)\in\Omega$.

Remarque 2.7.2. Supposons disposer d'une méthode à pas simple consistante pour la résolution approchée de (*). Notons $J_{(t_0,x_0)}$ l'ensemble des h pour lesquels $\underline{x}_1(h,t_0,x_0)$ est bien défini et posons

$$\underline{\Omega}=\{(h,t_0,x_0):(t_0,x_0)\in\Omega, h\in J_{(t_0,x_0)}\}.$$

Pour tout $(h,t_0,x_0)\in\underline{\Omega}$, posons également

$$\underline{f}(h,t_0,x_0)=\begin{cases}\dfrac{\underline{x}_1(h,t_0,x_0)-x_0}{h} & \text{si } h\neq 0\\ f(t_0,x_0) & \text{si } h=0\end{cases}$$

Par construction, $J_{(t_0,x_0)}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et on a

$$\lim_{\substack{h\longrightarrow 0\\ h\in J_{(t_0,x_0)}}}\underline{f}(h,t_0,x_0)=f(t_0,x_0)$$

et

$$\underline{x}_1(h,t_0,x_0)=x_0+h\underline{f}(h,t,t_0,x_0)$$

si $h\in J_{(t_0,x_0)}$.

Réciproquement, si

$$\underline{f}:\underline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$$

est une fonction définie sur une partie $\underline{\Omega}$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ pour laquelle

$$J_{(t_0,x_0)}=\{h:(h,t_0,x_0)\in\underline{\Omega}\}$$

est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ pour tout $(t_0,x_0)\in\Omega$ et si

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\underline{f}(h,t_0,x_0)=f(t_0,x_0)$$

alors la relation

$$\underline{x}_1(h,t_0,x_0)=x_0+h\underline{f}(h,t_0,x_0)$$

définit une méthode à pas simple consistante pour la résolution de (*).

Exemples 2.7.3.

(a) La méthode d'Euler est bien sûr une méthode à pas simple consistante pour la résolution de (*). Elle revient à prendre

$$\underline{x}_1(h, t_0, x_0) = x_0 + hf(t_0, x_0).$$

Pour cette méthode on a donc $\underline{\Omega} = \mathbb{R} \times \Omega$ et

$$\underline{f}(h, t_0, x_0) = f(t_0, x_0).$$

(b) Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. Supposons que $t_0 + h \in I_{(t_0,x_0)}$ et posons $t_1 = t_0 + h$ et $x_1 = \varphi(t_1; t_0, x_0)$. On sait que

$$x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, \varphi(\tau, t_0, x_0))\, d\tau$$

et que

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\tau, \varphi(\tau, t_0, x_0))\, d\tau \approx h\frac{f(t_0, x_0) + f(t_1, x_1)}{2} \qquad \text{(méthode du trapèze).}$$

Il s'ensuit que

$$x_1 \approx x_0 + h\frac{f(t_0, x_0) + f(t_1, x_1)}{2}.$$

Vu (a) on a aussi

$$x_1 \approx x_0 + hf(t_0, x_0).$$

On a donc

$$x_1 \approx x_0 + h\frac{f(t_0, x_0) + f(t_0 + h, x_0 + hf(t_0, x_0))}{2}.$$

Cette formule de calcul approché de x_1 donne une méthode à pas simple consistante pour la résolution de (*) comme sous le nom de *méthode d'Euler modifiée*. Pour cette méthode, on a

$$\underline{\Omega} = \{(h, t_0, x_0) : (t_0, x_0) \in \Omega, (t_0 + h, x_0 + hf(t_0, x_0) \in \Omega\}$$

et

$$\underline{f}(h, t_0, x_0) = \frac{f(t_0, x_0) + f(t_0 + h, x_0 + hf(t_0, x_0))}{2}.$$

Dans ce qui suit, nous nous limiterons à étudier les méthodes à pas simple consistantes pour lesquelles $\underline{\Omega}$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sur lequel $\underline{f}(h, t_0, x_0)$ est localement lipschitzien par rapport à x_0 et continue. Dans ce cas, la méthode considérée est toujours convergente. En effet :

Proposition 2.7.4. *Soit* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *et soit*

$$\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}^n$$

la solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)); \quad x(t_0) = x_0.$$

Supposons que $[t_0, t_0 + H] \subset]a, b[$ *pour un* $H > 0$. *Fixons* $M \in \mathbb{N}_0$ *et posons* $h = H/M$. *Posons également* $t_m = t_0 + mh$ *et* $x_m = \varphi(t_m)$ *pour tout* $m \in \{0, \ldots, M\}$. *Alors, pour* M *suffisamment grand la relation de récurrence*

$$\underline{x}_{m+1} = \underline{x}_m + h\underline{f}(h, t_m, \underline{x}_m)$$

jointe à la condition initiale $\underline{x}_0 = x_0$ *définit une suite finie* $(\underline{x}_m)_{m\in\{0,\ldots,M\}}$ *telle que*

$$(h, t_m, \underline{x}_m) \in \underline{\Omega}$$

pour tout $m \in \{0, \ldots, M\}$. *De plus, si on pose*

$$\underline{\varphi}(h, t) = \underline{x}_m + (t - t_m)\underline{f}(h, t_m, \underline{x}_m)$$

pour tout $t \in [t_m, t_{m+1}]$ *et tout* $m \in \{0, \ldots, M-1\}$, *alors*

$$t \mapsto \underline{\varphi}(h, t)$$

est une fonction affine par morceaux sur $[t_0, t_0 + H]$ *et*

$$\underline{\varphi}(h, t) \to \varphi(t)$$

uniformément en t *sur* $[t_0, t_0 + H]$ *si* $h \to 0$.

Démonstration. Comme

$$\{(0, t, \varphi(t)) : t \in [t_0, t_0 + H]\}$$

est un compact de $\underline{\Omega}$, il existe $\delta > 0$ tels que

$$\underline{K} = \{(h, t, x) : |h| \leq \delta, t \in [t_0, t_0 + H], |x - \varphi(t)| \leq \delta\}$$

soit un compact de $\underline{\Omega}$. Puisque $\underline{f}(h, t_0, x_0)$ est localement lipschitzien par rapport à x_0 sur $\underline{\Omega}$, il existe alors $\underline{L} > 0$ tel que

$$\left|\underline{f}(h, t, x_2) - \underline{f}(h, t, x_1)\right| \leq \underline{L}|x_2 - x_1|$$

si (h, t, x_1) et (h, t, x_2) sont dans $\underline{\Omega}$. De plus, comme

$$(h, t) \mapsto \underline{f}(h, t, \varphi(t))$$

est continu sur le compact $[-\gamma, \gamma] \times [t_0, t_0 + H]$, elle y est uniformément continue. Fixons $\varepsilon > 0$. Vu ce qui précède, il existe alors $\eta_\varepsilon \in]0, \delta[$ tel que

$$\left|\underline{f}(h, t, \varphi(t)) - \underline{f}(0, \tau, \varphi(\tau)\right| \leq \varepsilon$$

si $|h| \leq \eta_\varepsilon$, si $|t - \tau| \leq \eta_\varepsilon$ et si t et τ sont des points de $[t_0, t_0 + H]$.

Soit $m < M$. Supposons que $(t_k, \underline{x}_k)$ soit bien défini et appartienne à $\underline{K}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$. Si $k \in \{0, \ldots, m\}$ et si $t \in [t_k, t_{k+1}]$, on a alors

$$\underline{\varphi}(t, h) - \varphi(t) = (\underline{x}_k - x_k) + (t - t_k)\left[\underline{f}(h, t_k, \underline{x}_k) - \underline{f}(h, t_k, x_k)\right] + e_k(t)$$

où

$$e_k(t) = \int_{t_k}^{t} \left(\underline{f}(h, t_k, x_k) - f(\tau, \varphi(\tau))\right)\, d\tau.$$

Dans ces conditions, on a donc aussi

$$\left|\underline{\varphi}(t, h) - \varphi(t)\right| \leq (1 + \underline{L}h)|\underline{x}_k - x_k| + h\varepsilon.$$

si $h \leq \eta_\varepsilon$. Pour un tel h, on a donc en particulier

$$|\underline{x}_{k+1} - x_{k+1}| \leq (1 + h\underline{L})|\underline{x}_k - x_k| + h\varepsilon$$

pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$ et le Lemme 2.6.2 montre alors que

$$|\underline{x}_k - x_k| \leq \frac{(1 + h\underline{L})^k - 1}{h\underline{L}} h\varepsilon \leq \frac{e^{hk\underline{L}} - 1}{\underline{L}}\varepsilon \leq \frac{e^{H\underline{L}} - 1}{\underline{L}}\varepsilon$$

pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$. Si nous supposons que

$$\frac{e^{H\underline{L}} - 1}{\underline{L}}\varepsilon \leq \delta$$

et que $h \leq \eta_\varepsilon$, il s'ensuit que $\underline{x}_m$ est bien défini pour tout $m \in \{0, \ldots, M\}$ et que

$$\left|\underline{\varphi}(t, h) - \varphi(t)\right| \leq \frac{e^{H\underline{L}} - 1}{\underline{L}}\varepsilon$$

pour tout $t \in [t_0, t_0 + H]$. La conclusion en résulte aisément. □

Lorsque les fonctions f et $\underline{f}$ sont suffisamment régulières, il est possible de décrire plus finement les erreurs locales et globales associées à la méthode à pas simple étudiée.

Proposition 2.7.5 (Développement de l'erreur locale)**.** *Soit* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *et soit*

$$\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}^n$$

la solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)); \quad x(t_0) = x_0.$$

Supposons que h_0 *soit un réel strictement positif pour lequel*

$$[(0, t_0, x_0), (h_0, t_0, x_0)] \subset \underline{\Omega} \qquad \text{et} \qquad [t_0, t_0 + h_0] \subset]a, b[\,.$$

Supposons de plus que f *soit de classe* C_p *sur* Ω *et que les dérivées partielles*

$$\frac{\partial^l \underline{f}}{\partial h^l}$$

existent et soient continues sur $\underline{\Omega}$ *pour* $l \in \{1, \dots, p\}$*. Alors, l'erreur locale*

$$e(h, t_0, x_0) = x_0 + h\underline{f}(h, t_0, x_0) - x(t_0 + h)$$

admet le développement

$$e(h, t_0, x_0) = \sum_{l=1}^{p} a_l(t_0, x_0) \frac{h^l}{l!} + c_{p+1}(h, t_0, x_0)$$

où

$$a_l(t_0, x_0) = l \frac{\partial^{l-1} \underline{f}}{\partial h^{l-1}}(0, t_0, x_0) - \varphi^{(l)}(t_0)$$

et

$$|c_{p+1}(h, t_0, x_0)| \leq \underline{m}_{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$$

avec

$$\underline{m}_{p+1} = (p+1) \sup_{h \in [0, h_0]} \left| \frac{\partial^p \underline{f}}{\partial h^p}(h, t_0, x_0) \right| + \sup_{t \in [t_0, t_0 + h_0]} |\varphi^{(p+1)}(t)|.$$

Démonstration. La formule de Taylor montre que

$$\underline{f}(h, t_0, x_0) = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial^l \underline{f}}{\partial h^l}(0, t_0, x_0) \frac{h^l}{l!} + \underline{R}_{p-1}(h, t_0, x_0)$$

avec

$$|\underline{R}_{p-1}(h, t_0, x_0)| \leq \frac{h^p}{p!} \sup_{h \in [0, h_0]} \left| \frac{\partial^p \underline{f}}{\partial h^p}(h, t_0, x_0) \right|.$$

De même, comme $\varphi(t)$ est de classe C_{p+1} sur $]a,b[$, on a

$$\varphi(t_0+h)=\sum_{l=0}^{p}\varphi^{(l)}(t_0)\frac{h^l}{l!}+R_p(h,t_0)$$

avec

$$|R_p(h,t_0)|\leq\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\sup_{t\in[t_0,t_0+h_0]}|\varphi^{(p+1)}(t)|.$$

Puisque

$$e(h,t_0,x_0)=x_0+h\underline{f}(h,t_0,x_0)-\varphi(t_0+h)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}e(h,t_0,x_0)&=x_0+\sum_{l=1}^{p}\frac{\partial^{l-1}\underline{f}}{\partial h^{l-1}}(0,t_0,x_0)\frac{h^l}{(l-1)!}\\&\quad-\sum_{l=0}^{p}\varphi^{(l)}(t_0)\frac{h^l}{l!}+h\underline{R}_{p-1}(h,t_0,x_0)-R_p(h,t_0)\\&=\sum_{l=1}^{p}\left[l\frac{\partial^{l-1}\underline{f}}{\partial h^{l-1}}(0,t_0,x_0)-\varphi^{(l)}(t_0)\right]\frac{h^l}{l!}+c_{p+1}(h,t_0,x_0)\end{aligned}$$

avec

$$|c_{p+1}(h,t_0,x_0)|\leq h|\underline{R}_{p-1}(h,t_0,x_0)|+|R_p(h,t_0)|.$$

La conclusion en résulte. □

Définition 2.7.6. Dans les conditions de la proposition précédente, la méthode à pas simple étudiée sera dite *d'ordre au moins* p si

$$a_l(t_0,x_0)=0$$

pour tout $(t_0,x_0)\in\Omega$ et tout $l\in\{1,\dots,p\}$.

Proposition 2.7.7 (Majoration de l'erreur globale)**.** *Plaçons nous dans les conditions de la Proposition 2.7.5 et supposons que la méthode à pas simple étudiée soit d'ordre au moins p. Fixons $H>0$ tel que $[t_0,t_0+H]\subset\,]a,b[$. Alors il existe $\varepsilon>0$ et $h_0>0$ tels que*

$$\underline{K}=\{(h,t,x):h\in[0,h_0]\,,t\in[t_0,t_0+H]\,,|x-x(t)|\leq\varepsilon\}\subset\underline{\Omega}.$$

Posons

$$\underline{L}_1=\sup_{\underline{K}}\left\|\frac{\partial\underline{f}}{\partial x}\right\|\qquad et\qquad\underline{M}_{p+1}=(p+1)\sup_{\underline{K}}\left|\frac{\partial^p\underline{f}}{\partial h^p}\right|+\sup_{[t_0,t_0+H]}|\varphi^{(p+1)}|.$$

Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, posons $h = H/M$ et pour tout $m \in \{0, \ldots, M\}$, posons $t_m = a + mh$ et $x_m = \varphi(t_m)$. Supposons que $h \in [0, h_0]$ et que

$$\frac{e^{H\underline{L}_1} - 1}{\underline{L}_1} \frac{\underline{M}_{p+1}}{(p+1)!} h^p \leq \varepsilon.$$

Alors la relation de récurrence

$$\underline{x}_{m+1} = \underline{x}_m + h\underline{f}(h, t_m, \underline{x}_m)$$

jointe à la condition initiale $\underline{x}_0 = x_0$ définit une suite d'approximations $\underline{x}_m$ des x_m telle que $(h, t_m, \underline{x}_m) \in \underline{K}$ pour tout $m \in \{0, \ldots, M\}$. De plus, l'erreur globale

$$E_m(h) = \underline{x}_m - x_m$$

peut être estimée grâce à la majoration

$$|E_m(h)| \leq \frac{(1 + h\underline{L}_1)^m - 1}{\underline{L}_1} \frac{\underline{M}_{p+1}}{(p+1)!} h^p \leq \frac{e^{hm\underline{L}_1} - 1}{\underline{L}_1} \frac{\underline{M}_{p+1}}{(p+1)!} h^p$$

pour tout $m \in \{0, \ldots, M\}$. En particulier,

$$\sup_{m \in \{0, \ldots, M\}} |E_m(h)| \leq \frac{e^{H\underline{L}_1} - 1}{\underline{L}_1} \frac{\underline{M}_{p+1}}{(p+1)!} h^p.$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur m. Supposons donc que

$$|E_k(h)| \leq \varepsilon$$

et que

$$|E_k(h)| \leq \frac{(1 + h\underline{L}_1)^k - 1}{\underline{L}_1} \frac{\underline{M}_{p+1}}{(p+1)!} h^p$$

pour $k \in \{0, \ldots, m\}$ et $m \in \{0, \ldots, M-1\}$ et établissons qu'il en est de même pour $k = m + 1$. Puisque

$$\underline{x}_{m+1} = \underline{x}_m + h\underline{f}(h, t_m, \underline{x}_m),$$

on a

$$E_{m+1}(h) = E_m(h) + h(\underline{f}(h, t_m, \underline{x}_m) - \underline{f}(h, t_m, x_m)) + e(h, t_m, x_m).$$

Or la formule de Taylor montre que

$$|\underline{f}(h, t_m, \underline{x}_m) - \underline{f}(h, t_m, x_m)| \leq \underline{L}_1 E_m(h)$$

et la proposition 2.7.5 montre que

$$|e(h, t_m, x_m)| \leq \underline{M}_{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Il s'ensuit que

$$|E_{m+1}(h)| \leq (1 + h\underline{L}_1)|E_m(h)| + \underline{M}_{p+1}\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}.$$

On en tire que

$$|E_{m+1}(h)| \leq \frac{(1 + h\underline{L}_1)^{m+1} - 1}{\underline{L}_1}\,\frac{\underline{M}_{p+1}}{(p+1)!}h^p.$$

La conclusion en résulte aisément puisque

$$\frac{(1 + h\underline{L}_1)^{m+1} - 1}{\underline{L}_1}\,\frac{\underline{M}_{p+1}}{(p+1)!}h^p \leq \frac{e^{H\underline{L}_1} - 1}{\underline{L}_1}\,\frac{\underline{M}_{p+1}}{(p+1)!}h^p \leq \varepsilon.$$

□

2.8 Méthodes de Runge-Kutta explicites

Considérons le système différentiel (*) et notons

$$\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}^n$$

la solution maximale du problème de Cauchy associé à $(t_0, x_0) \in \Omega$. Fixons $h > 0$ tel que $[t_0, t_0 + h] \subset]a, b[$. Posons $t_1 = t_0 + h$ et $x_1 = \varphi(t_1)$. On a alors

$$x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau.$$

Soient $\rho_1, \ldots, \rho_m$ et $c_1, \ldots, c_m$ les rapports et les coefficients d'une méthode d'intégration numérique consistante à m points. On a alors

$$x_1 \approx x_0 + h\sum_{j=1}^{m} c_j f(t_{0j}, x_{0j})$$

où $t_{0j} = t_0 + \rho_j h$ et $x_{0j} = \varphi(t_{0j})$. Si nous disposons pour chaque $j \in \{2, \ldots, m\}$ des coefficients $c_{j1}, \ldots, c_{j(j-1)}$ d'une méthode d'intégration à $j - 1$ points consistante de rapports $\rho_{j1} = \rho_1/\rho_j, \ldots, \rho_{j(j-1)} = \rho_{j-1}/\rho_j$, nous pouvons aussi déduire de la relation

$$x_{0j} = x_0 + \int_{t_0}^{t_{0j}} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

que

$$x_{0j} \approx x_0 + \rho_j h\sum_{k=1}^{j-1} c_{jk} f(t_{0j}, x_{0j})$$

pour $j \in \{2, \ldots, m\}$. Si nous supposons que $\rho_1 = 0$, il est alors possible de construire de proche en proche des approximations $\underline{x}_{0j}$ des x_{0j} au moyen des relations

$$\underline{x}_{0j} = x_0 + \rho_j h \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk} f(t_{0j}, \underline{x}_{0j})$$

pour $j \in \{1, \ldots, m\}$ et d'en déduire une approximation $\underline{x}_1$ de x_1 par la formule

$$\underline{x}_1 = x_0 + h \sum_{j=1}^{m} c_j f(t_{0j}, \underline{x}_{0j}).$$

Cela nous conduit à une méthode à pas simple pour la résolution de (*) pour laquelle

$$\underline{f}(h, t_0, x_0) = \sum_{j=1}^{m} c_j \underline{f}_{0j}$$

les $\underline{f}_{0j}$ étant déterminés par les relations

$$\begin{aligned} \underline{x}_{0j} &= x_0 + h \sum_{k=1}^{j} \rho_j c_{jk} \underline{f}_{0k} \\ \underline{f}_{0j} &= f(t_{0j}, \underline{x}_{0j}) \end{aligned}$$

pour $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Définition 2.8.1. On dit que la méthode présentée ci-dessus est la *méthode de Runge-Kutta explicite associée au tableau*

$$\begin{array}{c|ccccc} \rho_1 & 0 & & & & \\ \rho_2 & a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \rho_{m-1} & a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & & 0 & \\ \rho_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m(m-1)} & 0 \\ \hline & c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} & c_m \end{array} \tag{T}$$

où

$$a_{jk} = \begin{cases} \rho_j c_{jk} & \text{si } k < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $j \in \{2, \ldots, m\}$.

Remarque 2.8.2. Le tableau de la définition précédente n'est pas entièrement arbitraire puisque la consistance des méthodes d'intégration numérique utilisées entraîne que l'on a

$$\sum_{j=1}^{m} c_j = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} = \rho_j$$

pour $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Vu ce qui a été dit plus haut, une méthode de Runge-Kutta explicite est toujours convergente lorsque $f(t,x)$ est lipschitzien par rapport à x et continu sur Ω. Elle sera aussi toujours d'ordre ≥ 1. On obtient également assez aisément le résultat suivant :

Proposition 2.8.3. *La méthode de Runge-Kutta explicite associée au tableau (T) est d'ordre ≥ 2 si et seulement si*

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \rho_j = \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire si la méthode $\mathrm{MS}_{c,\rho}$ *est exacte pour les polynômes de degré ≤ 1.*

Démonstration. En gardant les notations introduites plus haut, on a

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial h} = \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\partial \underline{f}_{0j}}{\partial h}$$

$$\frac{\partial \underline{x}_{0j}}{\partial h} = \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} \underline{f}_{0k} + h \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} \frac{\partial \underline{f}_{0k}}{\partial h}$$

et

$$\frac{\partial \underline{f}_{0j}}{\partial h} = \frac{\partial f}{\partial t}(t_{0j}, \underline{x}_{0j})\rho_j + \frac{\partial f}{\partial x}(t_{0j}, \underline{x}_{0j}) \frac{\partial \underline{x}_{0j}}{\partial h}.$$

En $h = 0$, on en tire que

$$\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial h}\right|_{h=0} = \sum_{j=1}^{m} c_j \left.\frac{\partial \underline{f}_{0j}}{\partial h}\right|_{h=0}$$

$$\left.\frac{\partial \underline{x}_{0j}}{\partial h}\right|_{h=0} = \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} f(t_0, x_0) = \rho_j f(t_0, x_0)$$

et

$$\left.\frac{\partial \underline{f}_{0j}}{\partial h}\right|_{h=0} = \rho_j \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0) f(t_0, x_0)\right].$$

On aura donc
$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial h}(0, t_0, x_0) = \frac{1}{2}\varphi''(t_0)$$
pour tout f de classe C_1 sur Ω si et seulement si
$$\sum_{j=1}^{m} c_j\rho_j = \frac{1}{2}.$$

□

Au prix de calculs plus lourds, on peut aussi montrer que :

Proposition 2.8.4. *La méthode de Runge-Kutta explicite associée au tableau (T) est d'ordre ≥ 3 si et seulement si*
$$\sum_{j=1}^{m} c_j\rho_j = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{j=1}^{m} c_j\rho_j^2 = \frac{1}{3}, \qquad \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{j-1} c_j a_{jk}\rho_k = \frac{1}{6}$$
et d'ordre ≥ 4 si et seulement si
$$\sum_{j=1}^{m} c_j\rho_j = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{j=1}^{m} c_j\rho_j^2 = \frac{1}{3}, \qquad \sum_{j=1}^{m} c_j\rho_j^3 = \frac{1}{4},$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{j-1} c_j a_{jk}\rho_k = \frac{1}{6}, \qquad \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{j-1} c_j a_{jk}\rho_k^2 = \frac{1}{12}, \qquad \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{j-1} c_j\rho_j a_{jk}\rho_k = \frac{1}{8}$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{l=1}^{k-1} c_j a_{jk} a_{kl}\rho_l = \frac{1}{12}.$$

Exemples 2.8.5.

(a) Si $m = 1$ le seul tableau possible est
$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$
et la méthode de Runge-Kutta explicite associée correspond à
$$\underline{f}(h, t_0, x_0) = f(t_0, x_0).$$
Elle est donc identique à la méthode d'Euler et est d'ordre 1.

(b) Si $m = 2$ les tableaux possibles sont de la forme
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \rho & \rho & 0 \\ \hline & 1-c & c \end{array}$$

avec $\rho \in]0,1]$ et $c \in \mathbb{R}$. La méthode de Runge-Kutta associée sera d'ordre 1 si $c \neq \frac{1}{2\rho}$ et d'ordre 2 si $c = \frac{1}{2\rho}$.

Le cas $\rho = 1/2$, $c = 1$ donne une méthode pour laquelle

$$\underline{f}(h, t_0, x_0) = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{f(t_0, x_0)}{2}\right)$$

et que l'on appelle souvent *méthode du point milieu.*

Le cas $\rho = 1$, $c = 1/2$ correspond à la méthode d'Euler modifiée puisque dans ce cas,

$$\underline{f}(h, t_0, x_0) = \frac{1}{2}f(t_0, x_0) + \frac{1}{2}f(t_0 + h, x_0 + hf(t_0, x_0)).$$

(c) La méthode de Runge-Kutta « classique » correspond au tableau

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & & \\
1/2 & 1/2 & 0 & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6
\end{array}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'elle est d'ordre 4.

3 Transformation de Laplace

3.1 Définition et premiers exemples

Définition 3.1.1. Soit f une fonction définie presque partout sur $]0,+\infty[$. On dit que f *admet une transformée de Laplace* si $e^{-zt}f(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour au moins un $z \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, on appelle *transformée de Laplace de* f la fonction

$$z \mapsto \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$$

définie pour tous les $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels $e^{-zt}f(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. La transformée de Laplace de f sera notée $\mathcal{L}\, f$ ou encore $\mathcal{L}_{t\to z}(f(t))$ si on veut insister sur les variables en jeu. Pour alléger les notations, on posera aussi

$$\mathcal{L}_z\, f = (\mathcal{L}\, f)(z).$$

Comme $e^{-zt}f(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si

$$|e^{-zt}f(t)| = e^{-(\Re z)t}|f(t)|$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$, il est clair que le domaine de définition de $\mathcal{L}\, f$ est égal à $\Gamma_f \times \mathbb{R}$ où

$$\Gamma_f = \{x \in \mathbb{R} : e^{-xt}f(t) \in L_1(]0,+\infty[)\}.$$

Proposition 3.1.2. *Si f est une fonction définie presque partout sur $]0,+\infty[$ admettant une transformée de Laplace alors Γ_f est un intervalle d'un des types suivants :*

(a) $]-\infty,+\infty[$;

(b) $[c,+\infty[$;

(c) $]c,+\infty[$.

Démonstration. D'après nos hypothèses, Γ_f est non vide. De plus, si $x_0 \in \Gamma_f$ et si $x \geq x_0$ alors la majoration

$$e^{-xt}|f(t)| \leq e^{-x_0 t}|f(t)|$$

montre que $x \in \Gamma_f$. Si Γ_f n'est pas minoré, il s'ensuit que $\Gamma_f = \mathbb{R}$ et on est dans le cas (a). Si, par contre, Γ_f est minoré, il possède une borne inférieure c. Pour tout $x > c$, il existe $x_0 \in \Gamma_f$ tel que $x \geq x_0$. Cela entraîne que $]c,+\infty[\subset \Gamma_f$. Comme $\Gamma_f \subset [c,+\infty[$ par construction, on doit donc avoir $\Gamma_f =]c,+\infty[$ ou $\Gamma_f = [c,+\infty[$. □

Définition 3.1.3. Dans les conditions de la proposition précédente, on définit l'*abscisse de convergence* c_f de la transformée de Laplace de f comme étant $-\infty$ dans le cas (a) et c dans les cas (b) et (c). On appelle *ouvert de convergence* de la transformée de Laplace de f l'ouvert

$$\Omega_f =]c_f, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

Remarque 3.1.4. La notion de transformée de Laplace est très liée à celle de transformée de Fourier. En effet :
(a) Si f est une fonction définie presque partout sur $]0, +\infty[$ et si on prolonge f par 0 sur $]-\infty, 0]$ alors la transformée de Laplace de f est définie en $z = x + iy \in \mathbb{C}$ si et seulement si $e^{-xt}f(t)$ admet un transformée de Fourier au sens L_1. De plus, dans ce cas, on a

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(f(t)) = \mathcal{F}^{-}_{t\longrightarrow y}(e^{-xt}f(t)).$$

(b) Soit f une fonction définie presque partout sur $\mathbb{R}$. Alors $f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les transformées de Laplace de $f(t)$ et $f(-t)$ sont définies en 0. De plus, dans ce cas, ces transformées sont au moins définies sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\pm}_{t\longrightarrow \xi} f(t) &= \int_0^\infty e^{\pm i\xi t} f(t)\, dt + \int_{-\infty}^0 e^{\pm i\xi t} f(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{\pm i\xi t} f(t)\, dt + \int_0^\infty e^{\mp i\xi t} f(-t)\, dt \\
&= \mathcal{L}_{t\longrightarrow \pm i\xi}(f(t)) + \mathcal{L}_{t\longrightarrow \mp i\xi}(f(-t)).
\end{aligned}$$

En particulier, les valeurs des transformées de Laplace de $f(t)$ et $f(-t)$ sur l'axe imaginaire déterminent la transformée de Fourier de f.

Remarque 3.1.5. Bien que la notion de transformée de Laplace soit très liée à celle de transformée de Fourier, il y a cependant beaucoup plus de fonctions admettant une transformée de Laplace que de fonctions admettant une transformée de Fourier. En effet :
(a) Si f est mesurable sur $]0, +\infty[$ et s'il existe $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(t) \leq Ce^{at}$$

pour $t > 0$, alors la transformée de Laplace de f est au moins définie sur le demi-plan ouvert $]a, +\infty[\times \mathbb{R}$ (i.e. on a $c_f \leq a$). En effet, dans ce cas

$$e^{-xt}f(t) \leq Ce^{(a-x)t}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x > a$.

(b) Il résulte en particulier de (a) que si f est mesurable et bornée sur $]0,+\infty[$ alors $\mathcal{L}\,f$ est au moins défini sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
(c) Il résulte aussi de (a) que toute exponentielle polynôme du type

$$f(t)=\sum_{k=1}^{K}P_k(t)e^{a_k t}$$

où $P_k(t)$ est un polynôme de degré d_k admet une transformée de Laplace définie au moins en tout z tel que

$$\Re z>\sup_{1\leq k\leq K}\Re a_k.$$

Exemples 3.1.6.
(a) On a

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(e^{at})=\int_0^{\infty}e^{-zt}e^{at}\,dt=\left.\frac{e^{(a-z)t}}{a-z}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{z-a},$$

le domaine de définition étant $\{z:\Re z>a\}$. En particulier,

$$\mathcal{L}(1)=\frac{1}{z}$$

sur $\{z:\Re z>0\}$.
(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}_0$, on a

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(t^n)=\int_0^{\infty}e^{-zt}t^n\,dz=t^n\left.\frac{e^{-zt}}{-z}\right|_0^{\infty}+n\int_0^{\infty}\frac{e^{-zt}}{z}t^{n-1}\,dt=\frac{n}{z}\,\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(t^{n-1})$$

si $\Re z>0$. En particulier,

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(t^n)=\frac{n!}{z^{n+1}}$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$, le domaine de définition étant $\{z:\Re z>0\}$.
(c) Si $0\leq a$, on a

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(\chi_{]a,+\infty[}(t))=\int_a^{+\infty}e^{-zt}\,dt=\left.\frac{e^{-zt}}{-z}\right|_a^{+\infty}=-\frac{e^{-az}}{-z}=\frac{e^{-az}}{z}$$

si $\Re z>0$.

3.2 Linéarité

Proposition 3.2.1. *Soit $(f_k)_{0\leq k\leq K}$ une famille de fonctions définies presque partout sur $]0,+\infty[$ et soit $(c_k)_{0\leq k\leq K}$ une famille de coefficients complexes. Alors, la transformée de Laplace de*

$$\sum_{k=0}^{K}c_k f_k$$

est définie en tout z où chaque $\mathcal{L}\, f_k$ est définie et en un tel z, on a

$$\mathcal{L}_z\left(\sum_{k=0}^{K} c_k f_k\right) = \sum_{k=0}^{K} c_k\, \mathcal{L}_z\, f_k.$$

Démonstration. Cela résulte directement de la linéarité de l'intégrale. □

Exemples 3.2.2. Une application directe du résultat précédent permet de calculer les transformées de Laplace des fonctions sin, cos, sh, ch.
(a) On a

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(\sin at) = \mathcal{L}_{t\longrightarrow z}\left(\frac{e^{iaz} - e^{-iaz}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z+ia}\right) = \frac{a}{z^2+a^2}$$

et

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(\cos at) = \mathcal{L}_{t\longrightarrow z}\left(\frac{e^{iaz} + e^{-iaz}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-ia} + \frac{1}{z+ia}\right) = \frac{z}{z^2+a^2}$$

si $\Re z > |\Im a|$.
(b) On a

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(\operatorname{sh} at) = \mathcal{L}_{t\longrightarrow z}\left(\frac{e^{az} - e^{-az}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right) = \frac{a}{z^2-a^2}$$

et

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(\operatorname{ch} at) = \mathcal{L}_{t\longrightarrow z}\left(\frac{e^{az} + e^{-az}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z+a}\right) = \frac{z}{z^2-a^2}$$

si $\Re z > |\Re a|$.

3.3 Holomorphie et comportement à l'infini des images

Proposition 3.3.1. *Soit f une fonction définie presque partout sur $]0,+\infty[$ admettant une transformée de Laplace. Alors $\mathcal{L}\, f$ est holomorphe sur son ouvert de convergence et sur cet ouvert*

$$(\mathcal{L}\, f)^{(n)}(z) = \mathcal{L}_{t\longrightarrow z}((-t)^n f(t)).$$

Démonstration. On a

$$(\mathcal{L}\, f)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$$

sur $\Omega_f =]c_f, +\infty[\times \mathbb{R}$. L'intégrand

$$e^{-zt} f(t)$$

est clairement holomorphe en $z \in \mathbb{C}$ pour presque tout $t \in]0, +\infty[$. De plus,

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p} \frac{\partial^q}{\partial \overline{z}^q}(e^{-zt} f(t)) = (-t)^p \delta_{q0} e^{-zt} f(t)$$

pour presque tout $t \in]0, +\infty[$. Soit K un compact de Ω_f. Comme $\Re z$ réalise son minimum sur K, il existe $a > c_f$ tel que $K \subset [a, +\infty[\times \mathbb{R}$. Pour un tel a, on a

$$\sup_K \left| \frac{\partial^p}{\partial z^p} \frac{\partial^q}{\partial \overline{z}^q}(e^{-zt} f(t)) \right| \leq |t|^p \delta_{q0} e^{-at} |f(t)|.$$

Si $\varepsilon > 0$ est choisi tel que $a - \varepsilon > c_f$ on en tire que

$$\sup_K \left| \frac{\partial^p}{\partial z^p} \frac{\partial^q}{\partial \overline{z}^q}(e^{-zt} f(t)) \right| \leq \sup_{t \in]0,+\infty[} \left(|t|^p \delta_{q0} e^{-\varepsilon t} \right) e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)|$$

et, comme la majorante est intégrable sur $]0, +\infty[$, les conditions d'application du théorème de dérivation des intégrales paramétriques sont vérifiées. Il s'ensuit que $\mathcal{L}_z f$ est de classe C_∞ sur Ω_f et que

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p} \frac{\partial^q}{\partial \overline{z}^q}(\mathcal{L}_z f) = \int_0^\infty \frac{\partial^p}{\partial z^p} \frac{\partial^q}{\partial \overline{z}^q}(e^{-tz} f(t))\, dt = \delta_{q0} \int_0^\infty e^{-tz} (-t)^p f(t)\, dt$$

d'où la conclusion. □

Corollaire 3.3.2. *Si f est transformable par Laplace et s'il existe T tel que $f = 0$ presque partout sur $]T, +\infty[$ alors $\mathcal{L} f$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. En effet, dans ce cas,

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = \int_0^T e^{-zt} f(t)\, dt$$

a un sens quel que soit $z \in \mathbb{C}$. □

Exemple 3.3.3. Si $0 \leq a < b$, on a

$$\mathcal{L}_{t \longrightarrow z}(\chi_{]a,b]}(t)) = \int_a^b e^{-zt}\, dt = \left. \frac{e^{-zt}}{-z} \right|_a^b = \frac{e^{-bz} - e^{-az}}{-z} = \frac{e^{-az} - e^{-bz}}{z}$$

si $z \neq 0$ et

$$\mathcal{L}_{t \longrightarrow z}(\chi_{]a,b]}(t)) = b - a$$

si $z = 0$. Comme $h(z) = e^{-az} - e^{-bz}$ possède un zéro simple en $z = 0$ et comme $h'(0) = -a + b$, on a

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{e^{-az} - e^{-bz}}{z} = b - a$$

et la transformée de Laplace étudiée est bien holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Proposition 3.3.4. *Soit f une fonction définie presque partout sur $]0,+\infty[$. Supposons que la transformée de Laplace de f soit définie en $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors,*

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow \infty \\ \Re z \geq x_0}} \mathcal{L}_z\, f = 0.$$

Démonstration. Par translation, on peut se ramener au cas où $x_0 = 0$. Dans ce cas, f est intégrable sur $]0,+\infty[$. Il existe donc une fonction étagée α à support dans $]0,+\infty[$ telle que

$$\int_0^\infty |f(t) - \alpha(t)|\, dt \leq \varepsilon/2.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re z \geq 0$ on a alors

$$\mathcal{L}_z\, f = \mathcal{L}_z(f - \alpha) + \mathcal{L}_z\, \alpha$$

et

$$\begin{aligned} |\, \mathcal{L}_z\, f| &\leq |\, \mathcal{L}_z(f-\alpha)| + |\, \mathcal{L}_z\, \alpha| \\ &\leq \int e^{-\Re z t} |f(t) - \alpha(t)|\, dt + |\, \mathcal{L}_z\, \alpha| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |\, \mathcal{L}_z\, \alpha|. \end{aligned}$$

Comme

$$\alpha = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{]a_k, b_k]} \qquad \text{avec } 0 < a_k < b_k$$

on a

$$\mathcal{L}_z\, \alpha = \sum_{k=1}^{K} c_k \frac{e^{-a_k z} - e^{-b_k z}}{z}$$

et

$$|\, \mathcal{L}_z\, \alpha| \leq \sum_{k=1}^{K} |c_k| \frac{e^{-a_k x} + e^{-b_k x}}{|z|} \leq \left(\sum_{k=1}^{K} |c_k| \right) \frac{2}{|z|}$$

si $\Re z \geq 0$. On en tire qu'il existe $R > 0$ tel que

$$|\, \mathcal{L}_z\, \alpha| \leq \varepsilon/2$$

si $|z| \geq R$ et si $\Re z \geq 0$. Pour un tel R, on a donc

$$|\, \mathcal{L}_z\, f| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

si $|z| \geq R$ et si $\Re z \geq 0$. Comme $\varepsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement, on a en fait montré que

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow \infty \\ \Re z \geq 0}} \mathcal{L}_z\, f = 0.$$

□

3.4 Injectivité

Proposition 3.4.1. *Soient f et g deux fonctions définies presque partout sur $]0,+\infty[$. Supposons que les transformées de Laplace de f et de g soient définies sur un voisinage V de $z_0 \in \mathbb{C}$ et coïncident en les points d'une suite infinie $(z_m)_{m\geq 1}$ qui converge vers z_0. Alors $f(t) = g(t)$ pour presque tous les $t \in]0,+\infty[$.*

Démonstration. Posons $\Omega = \Omega_f \cap \Omega_g$. Vu le résultat précédent, la fonction $\mathcal{L}\, f - \mathcal{L}\, g$ est holomorphe sur Ω. De plus, vu nos hypothèses, elle possède un zéro non isolé dans Ω. Comme Ω est de la forme $]c,+\infty[\, \times \mathbb{R}$, c'est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et le principe du prolongement analytique montre que $\mathcal{L}\, f - \mathcal{L}\, g = 0$ sur Ω. En particulier, $\mathcal{L}\, f$ et $\mathcal{L}\, g$ coïncident sur une droite parallèle à l'axe des y. La conclusion résulte donc du point (a) de la Remarque 3.1.4 et l'injectivité de la transformation de Fourier L_1. □

3.5 Images des translatées et des dilatées

Proposition 3.5.1. *Soit f une fonction définie presque partout sur $]0,+\infty[$ et soient $a \in \mathbb{C}$, $\tau > 0$, $\lambda > 0$.*

(a) Si on convient de prolonger $f(t)$ par 0 pour $t \leq 0$, alors la transformée de Laplace de $f(t-\tau)$ est définie en z si et seulement s'il en est de même de $\mathcal{L}\, f$ et on a

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(f(t-\tau)) = e^{-\tau z}\, \mathcal{L}_z\, f.$$

(b) La transformée de Laplace de $e^{at}f(t)$ est définie en z si et seulement si $\mathcal{L}\, f$ est définie en $z-a$ et on a

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(e^{at}f(t)) = \mathcal{L}_{z-a}\, f.$$

(c) La transformée de Laplace de $f(t/\lambda)$ est définie en z si et seulement si $\mathcal{L}\, f$ est définie en λz et on a

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(f(t/\lambda)) = \lambda\, \mathcal{L}_{\lambda z}\, f.$$

Démonstration. (a) Comme

$$e^{-tz}f(t-\tau) = e^{-\tau z}e^{-(t-\tau)z}f(t-\tau)$$

le théorème d'intégration par changement de variable montre que $e^{-tz}f(t-\tau)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il en est de même de

$$e^{-\tau z}e^{-tz}f(t)$$

et que dans ce cas on a

$$\int e^{-tz} f(t-\tau)\, dt = \int e^{-\tau z} e^{-tz} f(t)\, dt.$$

La conclusion en découle aussitôt.

(b) Il est clair que

$$e^{-tz} e^{at} f(t) = e^{-(z-a)t} f(t)$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\mathcal{L} f$ est définie en $z-a$ et que dans ce cas, on a

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(e^{at} f(t)) = \int_0^\infty e^{-tz} e^{at} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(z-a)t} f(t)\, dt = \mathcal{L}_{z-a} f.$$

(c) Comme

$$e^{-zt} f(t/\lambda) = e^{-(\lambda z)(t/\lambda)} f(t/\lambda)$$

le théorème d'intégration par changement de variable donne immédiatement le résultat annoncé. □

Remarque 3.5.2. Grâce au résultat précédent, on peut parfois se débarrasser des paramètres dont dépend la fonction à transformer. Par exemple :

(a) On a

$$\mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(e^{at}) = \mathcal{L}_{z-a}(1) = \frac{1}{z-a}$$

si $\Re z > \Re a$.

(b) On a

$$\mathcal{L}_z(\chi_{]a,+\infty[}) = \mathcal{L}_{t\longrightarrow z}(\chi_{]0,+\infty[}(t-a)) = e^{-az}\, \mathcal{L}_z(1) = \frac{e^{-az}}{z}$$

si $\Re z > 0$.

Exemple 3.5.3. Supposons que $f(t)$ soit la restriction à $]0,+\infty[$ de l'exponentielle polynôme

$$P_1(t)e^{a_1 t} + \cdots + P_K(t)e^{a_K t}$$

où $P_k(t)$ est un polynôme de degré d_k. Écrivons $P_k(t)$ sous la forme

$$P_k(t) = \sum_{l=0}^{d_k} c_{kl} t^l.$$

Comme

$$\mathcal{L}_z(t^n) = \frac{n!}{z^{n+1}}$$

si $\Re z > 0$, la formule de translation montre que

$$\mathcal{L}_z(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$$

si $\Re z > \Re a$. La linéarité de la transformée de Laplace montre alors que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_z\left(\sum_{k=1}^{K} P_k(t)e^{a_k t}\right) &= \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=0}^{d_k} c_{kl}\,\mathcal{L}_z(t^l e^{a_k t})\\ &= \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=0}^{d_k} c_{kl}\frac{l!}{(z-a_k)^{l+1}}\end{aligned}$$

si $\Re z > \sup_{1\leq k\leq K}\Re a_k$. Il s'ensuit que $\mathcal{L}_z\, f$ coïncide sur

$$\Omega = \{z : \Re z > \sup_{1\leq k\leq K} \Re a_k\}$$

avec une fonction rationnelle dont les pôles sont les $a_1, \ldots, a_K$; l'ordre du pôle a_k étant égal à $d_k + 1$.

Remarque 3.5.4. En tenant compte de l'exemple précédent et en utilisant la décomposition en fractions simples, on voit que si $R(z)$ est une fonction rationnelle de pôles $a_1, \ldots, a_K$ et si l'ordre de a_k est α_k alors $R(z)$ coïncide sur $\{z : \Re z > \sup_{1\leq k\leq K}\Re a_k\}$ avec $\mathcal{L}_{t\to z}\, f(t)$ où $f(t)$ est la restriction à $]0,+\infty[$ d'une exponentielle polynôme de la forme

$$f(t) = P_1(t)e^{a_1 t} + \cdots + P_K(t)e^{a_K t}$$

avec $\deg P_1 = \alpha_1 - 1, \ldots, \deg P_K = \alpha_K - 1$. Ce résultat est connu classiquement sous le nom de théorème de développement de Heavyside.

3.6 Images des dérivées

Proposition 3.6.1. *Soit f une fonction de classe C_1 sur $]0,+\infty[$. Supposons que les transformées de Laplace de f et de f' soient définies en $z \in \mathbb{C}$. Alors,*

(a) la fonction $f(t)$ possède une limite finie $f(0^+)$ pour $t \to 0^+$;

(b) l'expression $e^{-zt}f(t)$ tend vers 0 pour $t \to +\infty$;

(c) on a

$$\mathcal{L}_z\, f' = z\,\mathcal{L}_z\, f - f(0^+).$$

Démonstration. Comme

$$(e^{-zt}f(t))' = -ze^{-zt}f(t) + e^{-zt}f'(t)$$

l'intégrabilité de $e^{-zt}f(t)$ et de $e^{-zt}f'(t)$ sur $]0,+\infty[$ entraîne que l'on a

$$f(0^+) = \lim_{t\longrightarrow 0^+} e^{-zt}f(t) \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{t\longrightarrow\infty} e^{-zt}f(t) = 0$$

et que

$$0 - f(0^+) = -z\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-zt}f'(t)\,dt.$$

La conclusion en résulte aussitôt. □

Corollaire 3.6.2 (Formule de la valeur initiale)**.** *Soit f une fonction de classe C_1 sur $]0,+\infty[$. Supposons que les transformées de Laplace de f et de f' soient définies en $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} f(t) = \lim_{\substack{z\longrightarrow\infty\\ \Re z\geq x_0}} z\,\mathcal{L}_z\,f.$$

Démonstration. Cela découle directement du résultat précédent et du fait que

$$\lim_{\substack{z\longrightarrow\infty\\ \Re z\geq x_0}} \mathcal{L}_z\,f' = 0.$$

□

Corollaire 3.6.3. *Soit f une fonction de classe C_p sur $]0,+\infty[$. Supposons que les transformées de Laplace de $f, f', \ldots, f^{(p)}$ soient définies en $z \in \mathbb{C}$. Alors,*

(a) les fonctions $f(t), f'(t), \ldots, f^{(p-1)}(t)$ possèdent des limites finies en 0^+ ;

(b) les expressions $e^{-zt}f(t), \ldots, e^{-zt}f^{(p-1)}(t)$ tendent vers 0 pour $t \to +\infty$;

(c) on a

$$\mathcal{L}_z\,f^{(p)} = z^p\,\mathcal{L}_z\,f - z^{p-1}f(0^+) - \cdots - zf^{(p-2)}(0^+) - f^{(p-1)}(0^+).$$

Démonstration. Il suffit de procéder par récurrence et d'utiliser la Proposition 3.6.1 à chaque étape. □

Remarque 3.6.4. Les résultats précédents sont à la base d'une méthode très efficace de résolution du problème aux valeurs initiales pour les systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

A titre d'exemple, fixons une matrice complexe A de type (n, n) et considérons le problème consistant à trouver une fonction $\vec{f}$ de classe C_1 sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ telle que

$$\begin{cases} \vec{f}'(t) = A\vec{f}(t) + \vec{b}(t) & \text{si } t \geq 0 \\ \vec{f}(t) = \vec{f}_0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \tag{*}$$

la fonction $\vec{b}(t)$ étant supposée continue sur $[0, +\infty[$.

On sait par le théorie générale des équations différentielles ordinaires (théorème de Cauchy-Lipschitz) que ce problème possède une et une seule solution.

Supposons d'abord que la solution $\vec{f}(t)$ et sa dérivée $\vec{f}'(t)$ possèdent des transformées de Laplace. Alors, il en est de même de $\vec{b}(t)$ et on a

$$z\,\mathcal{L}_z\,\vec{f} - \vec{f}_0 = A\,\mathcal{L}_z\,\vec{f} + \mathcal{L}_z\,\vec{b}$$

si $\Re z \gg 0$. Il s'ensuit que

$$\mathcal{L}_z\,\vec{f} = (zI - A)^{-1}(\vec{f}_0 + \mathcal{L}_z\,\vec{b})$$

si $\Re z \gg 0$.

Réciproquement, supposons que $\vec{b}(t)$ admette une transformée de Laplace et qu'il existe une fonction f de classe C_1 sur $[0, +\infty[$ dont la dérivée admet une transformée de Laplace et qui est telle que

$$\mathcal{L}_z\,\vec{f} = (zI - A)^{-1}(\vec{f}_0 + \mathcal{L}_z\,\vec{b})$$

si $\Re z \gg 0$. Alors, pour $x_0 \gg 0$, la formule de la valeur initiale montre que

$$\vec{f}(0) = \lim_{z \longrightarrow \infty} z\,\mathcal{L}_z\,\vec{f} = \lim_{\substack{z \longrightarrow \infty \\ \Re z \geq x_0}} \left(I - \frac{1}{z}A\right)^{-1}(\vec{f}_0 + \mathcal{L}_z\,\vec{b}) = \vec{f}_0.$$

Comme de plus,

$$\mathcal{L}_z(\vec{f}' - A\vec{f}) = z(zI - A)^{-1}(\vec{f}_0 + \mathcal{L}_z\,\vec{b}) - \vec{f}_0 - A(zI - A)^{-1}(\vec{f}_0 + \mathcal{L}_z\,\vec{b}) = \mathcal{L}_z\,\vec{b}$$

l'injectivité de la transformation de Laplace montre que la fonction $\vec{f}$ est bien l'unique solution de (*) de classe C_1 sur $[0, +\infty[$.

Bien sûr, pour que la méthode précédente fonctionne, il faut qu'il soit possible de trouver une fonction f ayant les propriétés indiquées.

Nous allons montrer que tout se passe bien si $\vec{b} = 0$ et nous montrerons plus tard grâce à la convolution que tout se passe bien également dans le cas plus général où $\vec{b}$ admet une transformée de Laplace.

Supposons donc que $\vec{b} = 0$. Vu les formules de Cramer, les composantes de $(zI - A)^{-1}\vec{f}_0$ sont des fonctions rationnelles dont les pôles sont des valeurs propres de A. Tenant compte de la Remarque 3.5.4, cela montre qu'il existe une fonction $\vec{f}$ telle que

$$\mathcal{L}_z \vec{f} = (zI - A)^{-1}\vec{f}_0$$

si $\Re z \gg 0$ et que $\vec{f}$ est la restriction à $[0, +\infty[$ d'une exponentielle polynôme de la forme

$$\vec{g}(t) = \vec{P}_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + \vec{P}_m(t)e^{\lambda_m t}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont des valeurs propres de A et où les composantes de $\vec{P}_k(t)$ sont des polynômes en t de degrés strictement inférieurs à la multiplicité de λ_k comme valeur propre de A. Comme $\vec{g}(t)$ est de classe C_∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\vec{g}'(t)$ est également une exponentielle polynôme, il est clair que la fonction $\vec{f}$ vérifie les conditions requises pour être la solution de classe C_1 sur $[0, +\infty[$ du problème (*).

Exemple 3.6.5. Appliquons la méthode de la remarque précédente pour trouver la solution de classe C_1 sur $[0, +\infty[$ du système

$$\begin{cases} f' = -g \\ g' = f \end{cases}$$

telle que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$. Notons F et G les transformées de Laplace de f et g. Le système déterminant F et G est

$$\begin{cases} zF(z) = -G(z) \\ zG(z) - 1 = F(z) \end{cases}$$

On a donc

$$F(z) = \frac{-1}{z^2 + 1} \quad \text{et} \quad G(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

si $\Re z \gg 0$. On en tire que la solution du système de classe C_1 sur $[0, +\infty[$ est donnée par

$$f(t) = -\sin t \quad \text{et} \quad g(t) = \cos t$$

si $t \geq 0$.

Remarque 3.6.6. Considérons à présent un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre $d > 0$ général du type

$$A_d \vec{f}^{(d)} + \cdots + A_0 \vec{f} = \vec{b} \tag{*}$$

où les matrices complexes A_d, $\ldots$, A_0 sont de type (m, n) et où $\vec{b}$ est continu sur $[0, +\infty[$.

La méthode développée plus haut pour résoudre un système du type

$$\vec{f'} = A\vec{f}$$

peut être adaptée pour trouver les solutions $\vec{f}(t)$ de (*) qui sont de classe C_d sur $[0, +\infty[$ et pour lesquelles $\vec{f}(t), \ldots, \vec{f}^{(d)}(t)$ admettent des transformées de Laplace.

En effet, soit $\vec{f}$ une telle solution et soient $\vec{f}_0, \ldots, \vec{f}_{d-1}$ les valeurs $\vec{f}(t), \ldots, \vec{f}^{(d-1)}(t)$ en $t = 0$. Il découle des hypothèses sur $\vec{f}$ que le premier membre de (*) possède un transformée de Laplace. Il en est donc de même de $\vec{b}$. En transformant l'égalité (*) par Laplace et en tenant compte du Corollaire 3.6.3 on voit que $\mathcal{L}_z f$ est solution pour $\Re z \gg 0$ d'un système linéaire de la forme

$$(A_d z^d + \cdots + A_0)\,\mathcal{L}_z\,\vec{f} = B_0(z)\vec{f}_0 + \ldots B_{d-1}(z)\vec{f}_{d-1} + \mathcal{L}_z\,\vec{b}$$

où les $B_k(z)$ sont des matrices de type (m, n) dont les composantes sont des polynômes complexes de degré $< d - k$.

Réciproquement, si $\vec{b}$ admet une transformée de Laplace, si $\vec{F}(z)$ est une solution du système

$$(A_d z^d + \cdots + A_0)\vec{F}(z) = B_0(z)\vec{f}_0 + \ldots B_{d-1}(z)\vec{f}_{d-1} + \mathcal{L}_z\,\vec{b}$$

pour $\Re z \gg 0$ et s'il existe $\vec{f}(t)$ tel que

(i) $\vec{f}(t)$ est de classe C_d sur $[0, +\infty[$;

(ii) les fonctions $\vec{f}(t), \ldots, \vec{f}^{(d)}(t)$ admettent des transformées de Laplace ;

(iii) on a $\vec{f}(0) = \vec{f}_0, \ldots, \vec{f}^{(d-1)}(0) = \vec{f}_{d-1}$;

(iv) on a $\mathcal{L}_z\,\vec{f} = F(z)$ pour $\Re z \gg 0$,

alors l'injectivité de la transformation de Laplace montre que f est solution de (*).

Signalons qu'il se peut que le système (*) ne possède pas de solution de classe C_n calculable par Laplace pour certains jeux de conditions initiales $\vec{f}(0), \ldots, \vec{f}^{(n-1)}(0)$ et certains seconds membres $\vec{b}$ même si ceux-ci admettent une transformée de Laplace. Ce cas de figure gênant ne se produit cependant pas lorsque le système (*) est *normal* (i.e. lorsque l'on $m = n$ et $\det A_d \neq 0$).

Exemple 3.6.7. Appliquons le méthode précédente pour obtenir la solution de l'équation

$$f'' - f = t$$

telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. On sait que cette solution est une exponentielle polynôme. On a donc

$$z^2\,\mathcal{L}_z\,f - zf(0) - f'(0) - \mathcal{L}_z\,f = \frac{1}{z^2}$$

pour $\Re z \gg 0$. On en tire que

$$(z^2-1)\,\mathcal{L}_z\,f = \frac{z^2+1}{z^2}$$

puis que

$$\mathcal{L}_z\,f = \frac{z^2+1}{z^2(z^2-1)} = -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{L}_z\,f = \mathcal{L}_z\left(-t + (e^t - e^{-t})\right) = \mathcal{L}_z(-t + 2\operatorname{sh} t)$$

et

$$f(-t) = -t + 2\operatorname{sh} t$$

pour $t > 0$.

Proposition 3.6.8 (Formule de la valeur finale)**.** *Soit f une fonction de classe C_1 sur $]0,+\infty[$. Supposons que f' soit intégrable sur $]0,+\infty[$. Alors*

(a) $f(t)$ est bornée et possède des limites finies en 0^+ et en $+\infty$;

(b) $\mathcal{L}_z\,f$ (resp. $\mathcal{L}_z\,f'$) est définie si $\Re z > 0$ (resp. si $\Re z \geq 0$) ;

(c) on a

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} f(t) = \lim_{\substack{z\longrightarrow 0\\ \Re z>0}} z\,\mathcal{L}_z\,f.$$

Démonstration. Pour tous $t_0, t_1 > 0$, on a

$$f(t_1) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f'(t)\,dt.$$

Comme $f'(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ on voit que les limites

$$f(0^+) = \lim_{t\longrightarrow 0^+} f(t) \qquad \text{et} \qquad f(+\infty) = \lim_{t\longrightarrow+\infty} f(t)$$

existent et sont finies et on a

$$f(+\infty) - f(0^+) = \int_0^{\infty} f'(t)\,dt.$$

Comme $f(t)$ est aussi continue sur $]0, +\infty[$, il est clair que $f(t)$ est bornée. Il s'ensuit que $\mathcal{L}_z f$ est définie si $\Re z > 0$. Comme $f'(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, $\mathcal{L}_z f'$ est définie si $\Re z \geq 0$. Il résulte alors de la Proposition 3.6.1 que

$$\mathcal{L}_z f' = z \mathcal{L}_z f - f(0^+)$$

si $\Re z > 0$. De plus,

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow 0 \\ \Re z > 0}} \mathcal{L}_z f' = \lim_{\substack{z \longrightarrow 0 \\ \Re z > 0}} \int_0^\infty e^{-zt} f'(t)\, dt = \int_0^\infty f'(t)\, dt = f(+\infty) - f(0^+).$$

Donc,

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow 0 \\ \Re z > 0}} z \mathcal{L}_z f = \lim_{\substack{z \longrightarrow 0 \\ \Re z > 0}} \mathcal{L} f' + f(0^+) = f(+\infty).$$

□

Exemple 3.6.9. Considérons une masse m tombant verticalement dans une colonne d'huile. Notons $x(t)$ la distance entre la position de la masse au temps t et sa positon au temps $t = 0$. L'équation de Newton s'écrit

$$ma(t) = -cv(t) + mg$$

où $a(t) = x''(t)$, $v(t) = x'(t)$ et où c désigne une constante liée à la viscosité de l'huile. Comme $a(t) = v'(t)$, on voit que

$$m(z \mathcal{L}_z v - v(0)) = -c \mathcal{L}_z v + \frac{mg}{z}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{L}_z v = \frac{mv(0)z + mg}{z(mz + c)}$$

et le résultat précédent montre que

$$v(+\infty) = \frac{mg}{c}.$$

3.7 Images des convolées

Proposition 3.7.1. *Soient f et g des fonctions définies presque partout sur $]0, +\infty[$. Prolongeons f et g par zéro sur $]-\infty, 0]$ et supposons que les transformées de Laplace de f et de g soient définies en $z \in \mathbb{C}$. Alors,*

(a) le produit de convolution $f * g$ est défini presque partout sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\, d\tau$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, $f * g$ s'annule presque partout sur $]-\infty, 0]$.

(b) la transformée de Laplace de $f * g$ est définie en z et on a

$$\mathcal{L}_z(f * g) = \mathcal{L}_z f \, \mathcal{L}_z g.$$

Démonstration. Comme

$$f_x(t) = e^{-xt} f(t) \qquad \text{et} \qquad g_x(t) = e^{-xt} g(t)$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}$, on sait que la fonction

$$f_x * g_x$$

est définie presque partout sur $\mathbb{R}$ et y est intégrable. La fonction

$$f_x(t-\tau) g_x(\tau) = e^{-x(t-\tau)} f(t-\tau) e^{-x\tau} g(\tau) = e^{-xt} f(t-\tau) g(\tau)$$

est donc intégrable en τ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que $f * g$ est défini pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ et que

$$f_x * g_x = e^{-xt}(f * g)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne en particulier que la transformée de Laplace de $f * g$ est définie en z. Comme f et g sont nuls presque partout sur $]-\infty, 0]$, on a aussi

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) \, d\tau$$

d'où l'on tire que $f * g = 0$ presque partout sur $]-\infty, 0]$. Vu les propriétés de la transformée de Fourier L_1, on voit que

$$\mathcal{F}^-_y (f_x * g_x) = \mathcal{F}^-_y \, f_x \, \mathcal{F}^-_y \, g_x$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que

$$\mathcal{F}^-_{t \longrightarrow y}(e^{-xt}(f * g)(t)) = \mathcal{F}^-_{t \longrightarrow y}(e^{-xt} f(t)) \, \mathcal{F}^-_{t \longrightarrow y}(e^{-xt} g(t))$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$ et en particulier que

$$\mathcal{L}_z(f * g) = \mathcal{L}_z f \, \mathcal{L}_z g.$$

□

Exemples 3.7.2. (b) Soit $\vec{b}(t)$ une fonction continue sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ et soit $\vec{f_0}$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$. On sait par la théorie des équations différentielles que le problème

$$\begin{cases} \vec{f}'(t) = A\vec{f}(t) + \vec{b}(t) & \text{si } t \geq 0 \\ \vec{f}(t) = \vec{f_0} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

possède une et une seule solution de classe C_1 sur $[0, +\infty[$. Montrons qu'il est possible de calculer f par la méthode exposée dans la Remarque 3.6.4 si $\vec{b}(t)$ admet une transformée de Laplace.

On sait déjà que cela est possible si $\vec{b} = 0$ et que, dans ce cas, $\vec{f}$ est une exponentielle polynôme. Il existe donc une matrice $U(t)$ d'exponentielles polynômes telle que

$$\begin{cases} U'(t) = AU(t) & \text{si } t \geq 0 \\ U(t) = I & \text{si } t = 0 \end{cases} \tag{*}$$

et pour laquelle

$$\mathcal{L}_z U = (zI - A)^{-1}.$$

On sait aussi que si f est une solution du problème de départ de classe C_1 sur $[0, +\infty[$ et qui admet une transformée de Laplace alors

$$\mathcal{L}_z \vec{f} = (zI - A)^{-1}(\vec{f_0} + \mathcal{L}_z \vec{b})$$

si $\Re z \gg 0$. Comme

$$\mathcal{L}_z U = (zI - A)^{-1}$$

il vient

$$\mathcal{L}_z \vec{f} = (\mathcal{L}_z U)\vec{f_0} + \mathcal{L}_z U \, \mathcal{L}_z \vec{b} = \mathcal{L}_z[U\vec{f_0} + (U\chi_{[0,+\infty[}) * \vec{b}]$$

si $\Re z \gg 0$. On a donc

$$\vec{f} = U\vec{f_0} + (U\chi_{[0,+\infty[}) * \vec{b}$$

pour $t \geq 0$.

Réciproquement, si $\vec{f}$ est défini par la formule précédente, alors on vérifie facilement que $\vec{f}$ est de classe C_1 sur $[0, +\infty[$, que $\vec{f}(0) = \vec{f_0}$ et que $f(t)$ admet une transformée de Laplace. Il s'ensuit aussitôt que $\vec{f}(t)$ est solution du problème initial.

3.8 Images des primitives

Proposition 3.8.1. *Soit f une fonction définie presque partout sur $]0, +\infty[$. Prolongeons f par 0 sur $]-\infty, 0]$ et supposons que la transformée de Laplace de f soit définie en un $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re z > 0$. Alors la fonction*

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et s'annule sur $]-\infty, 0]$. De plus, la transformée de Laplace de φ est définie en z et on a

$$\mathcal{L}_z \varphi = \frac{1}{z} \mathcal{L}_z f.$$

Démonstration. Comme la fonction $e^{-z\tau}f(\tau)$ est intégrable en τ sur $\mathbb{R}$, la fonction $f(\tau)$ est intégrable sur $]0,t[$. Il s'ensuit que $\varphi(t)$ est bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que l'on a $\varphi(t) = 0$ si $t < 0$. De plus, comme

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \int_t^{t+h} f(\tau)\,d\tau = \int f(\tau)\chi_{]t,t+h[}(\tau)\,d\tau$$

le théorème de Lebesgue montre que

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \varphi(t+h) - \varphi(t) = 0.$$

La fonction $\varphi(t)$ est donc continue sur $\mathbb{R}$. Comme on a aussi

$$\varphi = f * \chi_{]0,+\infty[}$$

La Proposition 3.7.1 montre que la transformée de Laplace est définie en z et que l'on a

$$\mathcal{L}_z\,\varphi = \mathcal{L}_z\,f\,\mathcal{L}_z\,1 = \frac{1}{z}\,\mathcal{L}_z\,f.$$

□

3.9 Inversion de la transformation de Laplace

Proposition 3.9.1. *Soit f une fonction définie presque partout sur $]0,+\infty[$. Posons*

$$F(z) = \mathcal{L}_z\,f \qquad (\forall z \in \Gamma_f \times \mathbb{R})$$

et supposons que $F(x_0+iy_0)$ soit intégrable en y_0 pour un $x_0 > c_f$. Alors,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{t(x_0+iy_0)}F(x_0+iy_0)\,dy_0 = \lim_{R\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{[x_0-iR,x_0+iR]} e^{tz_0}F(z_0)\,dz_0$$

pour presque tout $t \in]0,+\infty[$.

Démonstration. Prolongeons $f(t)$ par zéro pour $t < 0$. On a alors

$$F(x_0+iy_0) = \mathcal{F}^-_{t\longrightarrow y_0}\left(e^{-tx_0}f(t)\right)$$

et l'hypothèse combinée à la formule d'inversion de Fourier montre que l'on a

$$e^{-tx_0}f(t) = \frac{1}{2\pi}\,\mathcal{F}^+_{y_0\longrightarrow t}(F(x_0+iy_0)) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ity_0}F(x_0+iy_0)\,dy_0$$

pour presque tout $t > 0$. On en tire que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{t(x_0+iy_0)}F(x_0+iy_0)\,dy_0 = \frac{1}{2i\pi}\lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_{[x_0-iR,x_0+iR]} e^{tz_0}F(z_0)\,dz_0$$

pour presque tout $t > 0$. □

Remarque 3.9.2. Soit F une fonction holomorphe sur un ouvert du type $]c,+\infty[+i\mathbb{R}$. Si F coïncide avec la transformée de Laplace de f pour $\Re z \gg 0$, si $F(x_0+iy_0)$ est intégrable en y_0 pour un $x_0 > \sup(c_f, c)$, alors la proposition précédente permet de calculer f à partir de F. Elle ne fournit cependant pas à elle seule un critère pour que f existe. On trouvera par contre un tel critère dans la proposition suivante.

Proposition 3.9.3. *Soit $c \in \mathbb{R}$ et soit F une fonction holomorphe sur l'ouvert $]c,+\infty[+i\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe et $x_0 > c$ tels que*

(i) $F(z) \to 0$ *si* $z \to \infty$ *dans le demi-plan* $\{z : \Re z \geq x_0\}$ *;*

(ii) *la fonction* $F(x_0+iy_0)$ *est intégrable en* y_0.

Alors, la relation

$$f(t) = \lim_{R\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{[x_0-iR,x_0+iR]} e^{tz_0} F(z_0)\, dz_0$$

définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$. *De plus,*

(a) *on a*
$$|f(t)| \leq e^{tx_0} \frac{1}{2\pi} \int |F(x_0+iy_0)|\, dy_0;$$

(b) *on a* $f(t) = 0$ *si* $t < 0$ *;*

(c) *on a* $c_f \leq x_0$ *et*
$$\mathcal{L}_z f = F(z)$$
si $\Re z > \sup(c_f, c)$.

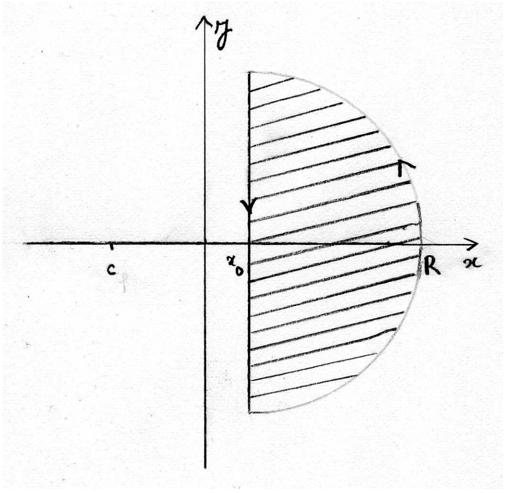
Démonstration. Il est clair que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{t(x_0+iy_0)} F(x_0+iy_0)\, dy_0 = \frac{1}{2\pi} e^{tx_0}\, \mathcal{F}^{+}_{y_0\to t}(F(x_0+iy_0)).$$

On en tire de suite que $f(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et que

$$|f(t)| \leq e^{tx_0} \frac{1}{2\pi} \int |F(x_0+iy_0)|\, dy_0.$$

En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction $F(z)$ et au bord du demi-disque ci-dessous



on voit que

$$\int_{[x_0-iR,x_0+iR]} e^{tz_0}F(z_0)\,dz_0 = \int_{C_R} e^{tz_0}F(z_0)\,dz_0$$

où C_R désigne le demi-cercle de centre x_0 et de rayon R situé dans le demi-plan fermé $\Re z \geq x_0$. Vu l'hypothèse (i), le lemme de Jordan montre que

$$\lim_{R\longrightarrow+\infty} \int_{C_R} e^{tz_0}F(z_0)\,dz_0 = 0$$

si $t < 0$. Il s'ensuit que

$$f(t) = \lim_{R\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{[x_0-iR,x_0+iR]} e^{tz_0}F(z_0)\,dz_0 = 0$$

si $t < 0$; ce qui établit (b).

Compte tenu du principe d'unicité du prolongement holomorphe, le point (c) sera établi si l'égalité $\mathcal{L}_z\,f = F(z)$ a lieu pour $\Re z > x_0$. Plaçons nous donc dans ce cas. Vu (a), la transformée de Laplace de f est alors définie en z et on a

$$2\pi\,\mathcal{L}_z\,f = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz_0}F(x_0+iy_0)dy_0\right]\,dt.$$

Vu le théorème de Tonelli, la fonction

$$e^{-zt}e^{tz_0}F(x_0+iy_0)$$

est intégrable en (t, z_0) sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ car

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}&\left[\int_0^{+\infty}|e^{-zt}e^{tz_0}F(x_0+iy_0)|dt\right]\,dy_0\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left.\frac{e^{(x_0-x)t}}{x_0-x}\right|_0^{+\infty}|F(x_0+iy_0)|\,dy_0\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|F(x_0+iy_0)|}{x-x_0}\,dy_0.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}2\pi\,\mathcal{L}_z\,f&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-zt}e^{tz_0}F(x_0+iy_0)dt\right]\,dy_0\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left.\frac{e^{(z_0-z)t}}{z_0-z}\right|_0^{+\infty}F(x_0+iy_0)\,dy_0\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(x_0+iy_0)}{z-z_0}\,dy_0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{L}_z\,f=\lim_{R\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{[x_0-iR,x_0+iR]}\frac{F(z_0)}{z-z_0}\,dz_0.$$

En appliquant le théorème des résidus à la fonction

$$z_0\mapsto\frac{F(z_0)}{z-z_0}$$

et au demi-disque fermé considéré au début de la démonstration, on voit que

$$\int_{C_R}\frac{F(z_0)}{z-z_0}\,dz_0-\int_{[x_0-iR,x_0+iR]}\frac{F(z_0)}{z-z_0}\,dz_0=-2i\pi F(z).$$

Comme

$$z_0\frac{F(z_0)}{z-z_0}\to 0$$

si $z_0\to\infty$ dans le demi-plan fermé $\{z\in\mathbb{C}:\Re z\geq x_0\}$, le lemme des grandes encoches montre que

$$\int_{C_R}\frac{F(z_0)}{z-z_0}\,dz_0\to 0$$

si $R\to+\infty$. Il s'ensuit que

$$\lim_{R\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{[x_0-iR,x_0+iR]}\frac{F(z_0)}{z-z_0}\,dz_0=F(z);$$

d'où la conclusion. □

A Appendice

A.1 Réduction des formes quadratiques réelles

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

Définition A.1.1. Une *forme quadratique réelle* sur E est une application

$$q : E \to \mathbb{R}$$

qui est donnée par une formule du type

$$q(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_j x_k \qquad (q_{jk} \in \mathbb{R})$$

dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E ; les réels $x_1, \ldots, x_n$ étant les coordonnées de x dans cette base.

Remarques A.1.2. Plaçons-nous dans les conditions de la définition précédente.

(a) Comme on a

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{kj} x_k x_j$$

il s'ensuit que

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{q_{jk} + q_{kj}}{2} x_k x_j.$$

On peut donc supposer sans restriction que les coefficients apparaissant dans l'expression de q sont symétriques (i.e. que l'on a $q_{jk} = q_{kj}$ pour tout $j, k \in \{1, \ldots, n\}$).

(b) Lorsque les coefficients apparaissant dans l'expression de q sont symétriques, il est clair que l'on a

$$q(x + y) - q(x) - q(y) = 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_j y_k$$

pour tous x, y dans E. Il s'ensuit que l'expression

$$b(x, y) = \frac{q(x + y) - q(x) - q(y)}{2}$$

est une forme bilinéaire sur E canoniquement associée à q et que

$$q_{jk} = b(e_j, e_k).$$

Cela montre en particulier que la matrice symétrique Q formée par les q_{jk} ne dépend que de q et de la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Si on désigne par X le vecteur colonne formé par les coordonnées de x dans cette base, on peut alors réécrire la relation liant Q à q sous la forme matricielle

$$q(x) = \tilde{X} Q X.$$

Proposition A.1.3. *Soit q une forme quadratique réelle sur E et soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ deux bases de E. Notons P la matrice de passage de la première base dans la seconde et Q, $\underline{Q}$ les matrices symétriques de q dans ces bases. Alors, on a*

$$\underline{Q} = \tilde{P} Q P.$$

Démonstration. Si X, $\underline{X}$ sont les vecteurs colonnes formés par les coordonnées de $x \in E$ dans les bases $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, on sait que

$$X = P \underline{X}.$$

Comme

$$q(x) = \tilde{X} Q X,$$

on voit que

$$q(x) = \tilde{\underline{X}} \tilde{P} Q \tilde{P} \underline{X}$$

d'où la conclusion. □

Proposition A.1.4. *Soit q une forme quadratique réelle sur E. Alors il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle on a*

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+m}^2$$

où p, m sont des naturels tels que $p + m \leq n$.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base arbitraire de E et soit Q la matrice de q dans cette base. Comme Q est symétrique et réelle, il existe une matrice réelle orthogonale U telle que

$$\tilde{U} Q U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Quitte à composer U avec une matrice de permutation, on peut même supposer qu'il existe des naturels p, m avec $p + m \leq n$ pour lesquels on a $\lambda_j > 0$ (resp. $\lambda_j < 0$, $\lambda_j = 0$) si $1 \leq j \leq p$ (resp. $p < j \leq p + m$, $p + m < j \leq n$). Posons alors

$$P = U \operatorname{diag}(1/\sqrt{|\lambda_1|}, \ldots, 1/\sqrt{|\lambda_{p+m}|}, 1, \ldots, 1)$$

et notons $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ la base formée par les vecteurs dont les coordonnées dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ sont données par les colonnes de P. Vu ce qui précède, la matrice $\underline{Q}$ de q dans la base $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ est alors donnée par la formule

$$\underline{Q} = \tilde{P} Q P = \operatorname{diag}(\operatorname{sgn} \lambda_1, \ldots, \operatorname{sgn} \lambda_{p+m}, 0, \ldots, 0)$$

d'où la conclusion. □

Définition A.1.5. Soit q une forme quadratique réelle sur E et soit F un sous-espace vectoriel de E. Conformément à l'usage, nous dirons que q est définie positive (resp. négative) sur F si

$$q(x) > 0 \qquad \text{(resp. } q(x) < 0)$$

pour tout $x \in F \setminus \{0\}$.

Proposition A.1.6. *Dans les conditions de la PropositionA.1.4, on a*

$$p = \sup\{\dim F : F \text{ sous-vectoriel de } E, q \text{ définie positive sur } F\}$$

et

$$m = \sup\{\dim F : F \text{ sous-vectoriel de } E, q \text{ définie négative sur } F\}$$

Démonstration. Établissons la formule pour p, celle pour m s'en déduira en remplaçant q par $-q$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E sur lequel q est définie positive et soit G l'enveloppe linéaire des vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$. Comme

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+m}^2,$$

il est clair que $q(x) \leq 0$ pour tout $x \in G$. Puisqu'on a aussi $q(x) > 0$ pour tout $x \in F \setminus \{0\}$, il s'ensuit que

$$F \cap G = \{0\}.$$

On en tire que

$$\dim F + \dim G = \dim(F + G) \leq n$$

et, comme $\dim G = n - p$, cela montre que

$$\dim F \leq p.$$

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que q est clairement défini positif sur l'enveloppe linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$. □

Définition A.1.7. Vu ce qui précède, il est clair que si la forme quadratique réelle q s'écrit sous la forme

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+m}^2$$

dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et sous la forme

$$q(x) = \underline{x}_1^2 + \cdots + \underline{x}_{\underline{p}}^2 - \underline{x}_{\underline{p}+1}^2 - \cdots - \underline{x}_{\underline{p}+\underline{m}}^2$$

dans la base $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ alors $p = \underline{p}$ et $m = \underline{m}$. En d'autres termes, le couple (p, m) est intrinsèquement associé à q. Nous dirons que (p, m) est la *signature* de q.

Corollaire A.1.8. *Soient q et $\underline{q}$ deux formes quadratiques réelles sur E. Alors il existe un endomorphisme φ de E tel que*

$$\underline{q} = q \circ \varphi$$

si et seulement si q et $\underline{q}$ ont même signature.

Démonstration. Cela découle immédiatement de ce qui précède. □

Remarque A.1.9. Soit q une forme quadratique sur E et soit

$$q(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_j x_k$$

son expression dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Supposons disposer de n formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ linéairement indépendantes sur E telles que

$$q(x) = \mu_1 \varphi_1^2(x) + \cdots + \mu_n \varphi_n^2(x)$$

pour certains coefficients $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$. Alors, il existe des coefficients $\varphi_{jk} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{jk} x_k$$

pour tout $x \in E$ et la matrice Φ formée par les φ_{jk} est inversible et telle que

$$Q = \tilde{\Phi} \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \Phi.$$

Soit $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ la base formée par les vecteurs dont les coordonnées dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ sont les colonnes de Φ^{-1}. Par construction, il est clair que la matrice de q dans cette base est

$$\underline{Q} = \widetilde{\Phi^{-1}} Q \Phi^{-1} = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Il est alors clair que la signature de q est donnée par le couple (p, m) où p (resp. m) est le nombre de $\mu_j > 0$ (resp. $\mu_j < 0$).

L'intérêt de la remarque précédente vient surtout de la proposition suivante :

Proposition A.1.10 (Méthode de Gauss)**.** *Soit q une forme quadratique sur E. Alors il est possible de construire algorithmiquement une base $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de E^* telle que*

$$q(x) = \mu_1 \varphi_1(x)^2 + \cdots + \mu_n \varphi_n(x)^2 \qquad (\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R})$$

en procédant par récurrence sur la dimension de E.

Démonstration. Procédons par récurrence sur la dimension de E et supposons le problème résolu si $\dim E < n$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit

$$q(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_j x_k$$

l'expression de q dans cette base. Le cas $q = 0$ étant trivial, nous pouvons supposer que $q \neq 0$. Cela étant, deux cas peuvent se produire.

(a) Si $q_{jj} \neq 0$ pour un $j \in \{1, \ldots, n\}$, on peut, quitte à permuter les éléments de la base, supposer que $q_{11} \neq 0$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} q(x) &= q_{11} x_1^2 + 2 \sum_{k=2}^{n} q_{1k} x_1 x_k + \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=2}^{n} q_{jk} x_j x_k \\ &= q_{11} \left(x_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{q_{1k}}{q_{11}} x_k \right)^2 + \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=2}^{n} q'_{jk} x_j x_k \end{aligned}$$

pour des q'_{jk} bien choisis. Vu notre hypothèse de récurrence, il existe des formes linéaires indépendantes $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ telles que

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=2}^{n} \varphi_{jk} x_k$$

et des réels $\mu_2, \ldots, \mu_n$ pour lesquels

$$\sum_{j=2}^{n} \sum_{k=2}^{n} q'_{jk} x_j x_k = \mu_2 \varphi_2(x)^2 + \cdots + \mu_n \varphi_n(x)^2.$$

Posons

$$\varphi_1(x) = x_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{q_{1k}}{q_{11}} x_k$$

et $\mu_1 = q_{11}$. Par construction, il est alors clair que les formes

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

sont linéairement indépendantes sur E et que

$$q(x) = \mu_1 \varphi_1(x)^2 + \mu_2 \varphi_2(x)^2 + \cdots + \mu_n \varphi_n(x)^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Si $q_{jj} = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, alors il existe $j \neq k$ tel que $q_{jk} \neq 0$ et au prix d'une permutation des vecteurs de base, nous pouvons supposer que $q_{12} \neq 0$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} q(x) &= 2q_{12}x_1x_2 + 2\sum_{k=3}^{n} q_{1k}x_1x_k + 2\sum_{k=3}^{n} q_{2k}x_2x_k + \sum_{j=3}^{n}\sum_{k=3}^{n} q_{jk}x_jx_k \\ &= 2q_{12}\left(x_1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{q_{2k}}{q_{12}}\, x_k\right)\left(x_2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{q_{1k}}{q_{12}}\, x_k\right) + \sum_{j=3}^{n}\sum_{k=3}^{n} q'_{jk}x_jx_k \end{aligned}$$

pour des q'_{jk} bien choisis. Vu notre hypothèse de récurrence, il existe alors des formes linéairement indépendantes $\varphi_3, \ldots, \varphi_n$ telles que

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=3}^{n} \varphi_{jk}x_k$$

pour $j \in \{3, \ldots, n\}$ et des réels $\mu_3, \ldots, \mu_n$ pour lesquels

$$\sum_{j=3}^{n}\sum_{k=3}^{n} q'_{jk}x_jx_k = \mu_3\varphi_3(x)^2 + \cdots + \mu_n\varphi_n(x)^2.$$

Posons

$$\varphi_1(x) = x_1 + x_2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{q_{2k} + q_{1k}}{q_{12}}\, x_k; \qquad \mu_1 = \frac{q_{12}}{2}$$

et

$$\varphi_2(x) = x_1 - x_2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{q_{2k} - q_{1k}}{q_{12}}\, x_k; \qquad \mu_2 = -\frac{q_{12}}{2}.$$

Par construction, il est alors clair que les formes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ sont linéairement indépendantes et que

$$q(x) = \mu_1\varphi_1(x)^2 + \mu_2\varphi_2(x)^2 + \mu_3\varphi_3(x)^2 + \cdots + \mu_n\varphi_n(x)^2$$

pour tout $x \in E$ puisque l'on a l'identité remarquable

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

si a, $b \in \mathbb{R}$. $\square$

A.2 Démonstration directe du lemme de Gronwall

Proposition A.2.1. *Soient a, b des fonctions continues sur un intervalle $[t_0, t_1]$ de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que a soit positive sur $[t_0, t_1]$ et que ψ soit une fonction continue sur $[t_0, t_1]$ telle que*

$$\psi(t) \leq x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(\tau)\psi(\tau) + b(\tau))\, d\tau.$$

Alors ψ est majorée sur I par

$$e^{A(t,t_0)} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau,t_0)} b(\tau)\, d\tau \right]$$

si

$$A(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau.$$

Démonstration. Posons

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(\tau)\psi(\tau) + b(\tau))\, d\tau.$$

Alors $u(t)$ est de classe C_1 sur I et majore $\psi(t)$ sur I. Il s'ensuit que

$$u'(t) = a(t)\psi(t) + b(t) \leq a(t)u(t) + b(t).$$

Posons

$$v(t) = u(t)e^{-A(t,t_0)}.$$

Alors $v(t)$ est de classe C_1 sur I et on a

$$v'(t) = [u'(t) - a(t)u(t)]e^{-A(t,t_0)} \qquad \text{et} \qquad v(t_0) = x_0.$$

Il s'ensuit d'abord que

$$v'(t) \leq b(t)e^{-A(t,t_0)}$$

puis que

$$v(t) \leq x_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau)e^{-A(\tau,t_0)}\, d\tau.$$

Ainsi,

$$u(t) \leq e^{A(t,t_0)} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau,t_0)} b(\tau)\, d\tau \right]$$

d'où la conclusion. □

A.3 Méthodes d'intégration numérique à m points

Soit $m \in \mathbb{N}_0$ et soient $\rho_1, \ldots, \rho_m$ et $c_1, \ldots, c_m$ des réels tels que

$$0 \leq \rho_1 < \cdots < \rho_m \leq 1, \qquad c_1 + \cdots + c_m = 1.$$

Définition A.3.1. Dans la suite, nous appellerons *méthode d'intégration numérique simple de rapports* $\rho_1, \ldots, \rho_m$ et *de coefficients* $c_1, \ldots, c_m$ et nous désignerons par $\mathrm{MS}_{\rho,c}$, la méthode qui consiste à approcher

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

par

$$(b-a)\sum_{j=1}^{m} c_j f(a + \rho_j(b-a))$$

pour tout intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et toute fonction f continue sur $[a, b]$. La méthode $\mathrm{MS}_{\rho,c}$ sera dite *exacte sur* $[a, b]$ *pour* $f \in C_0([a, b])$ si l'erreur associée

$$E_a^b(f) = (b-a)\sum_{j=1}^{m} c_j f(a + \rho_j(b-a)) - \int_a^b f(x)\, dx$$

est nulle.

Proposition A.3.2. *La méthode* $\mathrm{MS}_{\rho,c}$ *est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à* p *si et seulement si on a*

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \rho_j^k = \frac{1}{k+1}$$

pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$.

Démonstration. Comme tout polynôme de degré inférieur ou égal à p peut s'écrire comme combinaison linéaire des polynômes

$$1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^p$$

il est clair que la méthode $\mathrm{MS}_{\rho,c}$ sera exacte sur $[a, b]$ pour tous ces polynômes si et seulement si

$$E_a^b((x-a)^k) = 0$$

pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$. Comme

$$E_a^b((x-a)^k) = (b-a)\sum_{j=1}^{m} c_j \rho_j^k (b-a)^k - \frac{(b-a)^{k+1}}{k+1},$$

la conclusion est immédiate. $\square$

Exemple A.3.3. Si $m = 1$, les équations deviennent

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_1\rho_1 &= 1/2 \\ &\vdots \\ c_1\rho_1^p &= 1/(p+1) \end{aligned}$$

La méthode est donc exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 si $\rho_1 = 1/2$ mais ne sera jamais exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Si $m = 2$, les équations deviennent

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1\rho_1 + c_2\rho_2 &= 1/2 \\ &\vdots \\ c_1\rho_1^p + c_2\rho_2^p &= 1/(p+1) \end{aligned}$$

Un calcul direct mais un peu long montre que la méthode peut être rendue exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3 en prenant

$$\rho_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad \rho_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

mais qu'elle ne sera jamais exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 4.

Plus généralement, on peut montrer que la méthode $\mathrm{MS}_{\rho,c}$ peut être rendue exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $2m-1$ à conditions de prendre

$$\rho_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_1, \ldots, \rho_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_m;$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ est la liste ordonnée des zéros du polynôme de Legendre de degré m mais qu'elle ne sera jamais exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $2m$.

Proposition A.3.4. *La méthode* $\mathrm{MS}_{\rho,c}$ *est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à* p *si et seulement si*

$$E_{x_0}^{x_0+h}(f) = o(h^{p+1})$$

pour $h \to 0^+$ *lorsque* $f \in C_p([x_0, x_0 + H])$ $(H > 0)$.

Démonstration. Soit $H > 0$, soit f une fonction de classe $C_p([x_0, x_0 + H])$ et soit F la primitive de f sur $[x_0, x_0 + H]$ qui s'annule en x_0. Par Taylor, on a

$$f(x_0 + \rho_j h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \rho_j^k h^k + o(h^p)$$

et

$$F(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{p+1} \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^{p+1})$$

si $h \to 0^+$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} E_{x_0}^{x_0+h}(f) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \rho_j^k \right) h^{k+1} - \sum_{k=1}^{p+1} \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^{p+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \left[\sum_{j=1}^{m} c_j \rho_j^k - \frac{1}{k+1} \right] h^{k+1} + o(h^{p+1}) \end{aligned}$$

si $h \to 0^+$. On a donc

$$E_{x_0}^{x_0+h}(f) = o(h^{p+1})$$

pour $h \to 0^+$ si et seulement si

$$f^{(k)}(x_0) \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \rho_j^k - \frac{1}{k+1} \right) = 0$$

pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$ et la conclusion résulte alors aisément de la proposition précédente. □

Proposition A.3.5. *Supposons que la méthode* $\mathrm{MS}_{\rho,c}$ *soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à* p. *Posons*

$$k(x) = x^p \chi_{]0,+\infty[}(x)$$

et

$$K_a^b(\xi) = E_a^b(x \mapsto k(x - \xi)).$$

Alors

$$E_a^b(f) = \frac{1}{p!} \int_a^b K_a^b(\xi) f^{(p+1)}(\xi)\, d\xi$$

pour tout $f \in C_{p+1}([a, b])$.

Démonstration. Soit $f \in C_{p+1}([a,b])$. Vu la formule de Taylor avec reste intégral, nous savons que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(p)}(a)\frac{(x-a)^p}{p!} + \frac{1}{p!}\int_a^x f^{(p+1)}(\xi)(x-\xi)^p \, d\xi.$$

Il s'ensuit que

$$f(x) = P(x) + \frac{1}{p!}\int_a^b f^{(p+1)}(\xi)k(x-\xi)\, d\xi.$$

où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à p. Comme la fonctionnelle

$$f \mapsto E_a^b(f)$$

est linéaire sur $C_{p+1}([a,b])$ et nulle en P, on en tire que

$$p!E_a^b(f) = E_a^b\left(x \mapsto \int_a^b f^{(p+1)}(\xi)k(x-\xi)\, d\xi\right).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} p!E_a^b(f) = (b-a)\sum_{j=1}^m c_j \int_a^b f^{(p+1)}(\xi)k(x_j-\xi)\, d\xi \\ - \int_a^b \left[\int_a^b f^{(p+1)}(\xi)k(x-\xi)\, d\xi\right] dx. \end{aligned}$$

Comme la fonction

$$(x,\xi) \mapsto f^{(p+1)}(\xi)k(x-\xi)$$

est intégrable sur $[a,b]\times[a,b]$, il résulte du théorème de Fubini que

$$p!E_a^b(f) = \int_a^b f^{(p+1)}(\xi)E_a^b(x \mapsto k(x-\xi))\, d\xi;$$

d'où la conclusion. □

Définition A.3.6. On dit que la fonction K_a^b de la proposition précédente est le *noyau de Peano de degré p* de la méthode $\mathrm{MS}_{\rho,c}$.

Proposition A.3.7. *Dans les conditions de la proposition précédente, on a*

$$K_a^b(\xi) = (b-a)^{p+1}K\left(\frac{\xi-a}{b-a}\right)$$

où K désigne le noyau de Peano de degré p de $\mathrm{MS}_{\rho,c}$ *sur* $[0,1]$. *En particulier, il existe une constante $C \geq 0$ telle que*

$$\sup_{\xi\in[a,b]} \left|K_a^b(\xi)\right| = (b-a)^{p+1}C$$

pour tous $b > a$ dans $\mathbb{R}$ et on a

$$\left|E_a^b(f)\right| \leq C(b-a)^{p+2} \sup_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(p+1)}(\xi)\right|$$

pour tout $f \in C_{p+1}([a,b])$.

Démonstration. On a

$$K_a^b(\xi) = (b-a)\sum_{j=1}^{m} c_j k(x_j-\xi) - \int_a^b k(x-\xi)\, dx.$$

En effectuant les changements de variables donnés par

$$x = a + t(b-a) \qquad \xi = a + \tau(b-a)$$

on en tire que

$$\begin{aligned} K_a^b(\xi) &= (b-a)\sum_{j=1}^{m} c_j (b-a)^p k(\rho_j-\tau) - \int_0^1 (b-a)^p k(t-\tau)(b-a)\, dt \\ &= (b-a)^{p+1}K(\tau). \end{aligned}$$

□

Corollaire A.3.8. *Dans les conditions de la proposition précédente, on a*

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt = h\sum_{j=1}^{m} c_j f(x_0+\rho_j h) + O(h^{p+2})$$

pour $h \to 0^+$ si $f \in C_{p+1}([x_0, x_0+H])$ $(H > 0)$. En d'autres termes, la méthode considérée est localement d'ordre supérieur ou égal à $p+2$.

Démonstration. Cela découle directement de la proposition précédente. □

Fixons $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Posons $h = (b-a)/n$ et $s_k = a + kh$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Puisque

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} f(x)\, dx$$

pour toute fonction f continue sur $[a,b]$ et que

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(x)\,dx \approx h\sum_{j=1}^{m} c_j f(s_k+\rho_j h)$$

pour $k\in\{0,\dots,n-1\}$, on a donc

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} h\sum_{j=1}^{m} c_j f(s_k+\rho_j h). \tag{*}$$

Définition A.3.9. La formule d'intégration approchée discutée ci-dessus correspond à une méthode que nous appellerons *méthode d'intégration numérique composée de rapport* $\rho_1,\dots,\rho_m$ *et de coefficients* $c_1,\dots,c_m$ et que nous désignerons par $\mathrm{MC}_{\rho,c}$.

Proposition A.3.10. *Supposons que la méthode* $\mathrm{MS}_{\rho,c}$ *soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à* p*. Alors, on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} h\sum_{j=1}^{m} c_j f(s_k+\rho_j h) - \int_a^b f(x)\,dx = O(h^{p+1})$$

où

$$\left|O(h^{p+1})\right| \le C(b-a)h^{p+1}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} h\sum_{j=1}^{m} c_j f(s_k+\rho_j h) - \int_a^b f(x)\,dx\\ = \sum_{k=0}^{n-1}\left[h\sum_{j=1}^{m} c_j f(s_k+\rho_j h) - \int_{s_k}^{s_{k+1}} f(x)\,dx\right]\end{aligned}$$

et d'utiliser la Proposition A.3.7. □

Remarque A.3.11. On peut donc utiliser $\mathrm{MC}_{\rho,c}$ pour approcher

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

aussi près que l'on veut par

$$\sum_{k=0}^{n-1} h\sum_{j=1}^{m} c_j f(s_k+\rho_j h)$$

pour $f\in C_0([a,b])$ à condition de choisir h suffisamment petit.

Table des matières

Références

[1] V. Arnold, *Équations différentielles ordinaires*, Éditions Mir, Moscou, 1974.

[2] ———, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Éditions Mir, Moscou, 1980.

[3] Garrett Birkhoff et Gian-Carlo Rota, *Ordinary differential equations*, 3e éd., John Wiley and Sons, New York, 1978.

[4] Earl A. Coddington, *An introduction to ordinary differential equations*, Prentice-Hall Mathematics Series, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1961.

[5] Earl A. Coddington et Norman Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1955.

[6] M. De Wilde, *Analyse non linéaire*, Institut de Mathématique de l'Université de Liège, 1978.

[7] Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, 3e éd., Grenoble Sciences, EDP Sciences, Les Ulis, 2006.

[8] Einar Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1976.

[9] Witold Hurewicz, *Lectures on ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York, 1958.

[10] E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover, New York, 1956, reprint of the first edition published in 1926.

[11] J. A. Lappo-Danilevsky, *Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires*, vol. I, II & III (bound as one), Chelsea, 1953.

[12] A. Philippov, *Receuil de problèmes d'équations différentielles*, Éditions Mir, Moscou, 1976.

[13] L. Pontriaguine, *Équations différentielles ordinaires*, Éditions Mir, Moscou, 1969.

[14] Clay C. Ross, *Differential equations : An introduction with mathematica®*, 2e éd., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2004.

[15] N. Rouche et J. Mawhin, *Équations différentielles ordinaires*, vol. 1 (Théorie générale), Masson, Paris, 1973.

[16] ———, *Équations différentielles ordinaires*, vol. 2 (Stabilité et solutions périodiques), Masson, Paris, 1973.

[17] George F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1972.