Fonctions de Variables Complexes

Notes du cours de master en sciences mathématiques

Jean-Pierre Schneiders

Année 2010-2011

1 Principe de l'argument et conséquences

1.1 Principe de l'argument de Cauchy

Proposition 1.1.1. *Soit K un compact de $\mathbb{C}$ bordé par une courbe C et soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant K. Supposons que f ne s'annule pas sur C. Alors f ne possède qu'un ensemble fini $\{a_1, \ldots, a_p\}$ de zéros dans K et chacun de ces zéros est de multiplicité finie. De plus, si on désigne par μ_j la multiplicité de a_j comme zéro de f pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, alors on a*

$$\mu_1 + \cdots + \mu_p = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

Démonstration. Quitte à restreindre l'ouvert Ω, on peut supposer que toutes ses composantes connexes rencontrent K. Dans ce cas, tous les zéros de f dans Ω sont isolés car, sinon, f s'annulerait identiquement sur une composante connexe de Ω et une telle composante doit rencontrer C. Puisque tous les zéros de f dans Ω sont isolés et que K est compact, f ne possède qu'un qu'un ensemble fini $\{a_1, \ldots, a_p\}$ de zéros dans K et chacun de ces zéros est de multiplicité finie. Quitte à restreindre Ω, on peut alors supposer que f ne s'annule pas sur $\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_p\}$.

Soit $j \in \{1, \ldots, p\}$. Vu ce qui précède, a_j est une singularité isolée de $f'(z)/f(z)$. De plus, on a

$$f(z) = (z - a_j)^{\mu_j} g_j(z)$$

où g_j est une fonction holomorphe sur Ω qui ne s'annule pas en a_j. Il s'ensuit que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\mu_j (z - a_j)^{\mu_j - 1} g_j(z) + (z - a_j)^{\mu_j} g_j'(z)}{(z - a_j)^{\mu_j} g_j(z)}.$$

et que

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow a_j \\ \neq}} \frac{f'(z)}{f(z)}(z - a_j) = \mu_j.$$

Cela montre que a_j est un pôle simple de $f'(z)/f(z)$ de résidu égal à μ_j. La conclusion résulte alors directement du théorème des résidus de Cauchy. □

Définition 1.1.2. Dans les conditions de la proposition précédente, on dit que $\mu_1 + \cdots + \mu_p$ est le *nombre algébrique* de zéro de f dans K.

Remarque 1.1.3. Plaçons nous dans les conditions de l'énoncé et choisissons un découpage orienté $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_J$ de C de sorte que pour chaque $j \in \{1, \ldots, J\}$ il existe un $\theta_j \in]-\pi, \pi]$ pour lequel

$$\Gamma_j \subset f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta_j} : r \leq 0\}).$$

Alors, Γ_j est inclus dans le domaine d'holomorphie de $\ln_{\theta_j} f(z)$ et comme

$$(\ln_{\theta_j} f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

sur ce domaine, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{\ln_{\theta_j} f(B_j) - \ln_{\theta_j} f(A_j)}{2i\pi}$$

si A_j (resp. B_j) désigne l'origine (resp. l'extrémité) de Γ_j. Il s'ensuit que,

$$\Re\left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz\right) = \frac{\arg_{\theta_j} f(B_j) - \arg_{\theta_j} f(A_j)}{2\pi}.$$

et que

$$\mu_1 + \cdots + \mu_p = \sum_{j=1}^{J} \frac{\arg_{\theta_j} f(B_j) - \arg_{\theta_j} f(A_j)}{2\pi}.$$

Cette reformulation du résultat précédant permet de mieux comprendre pourquoi ont lui donne le nom de principe de l'argument. Elle montre également que le nombre algébrique de zéros de f dans K est donné, en quelque sorte, par le nombre de tours que fait $f(C)$ autour de l'origine.

Le principe de l'argument peut être généralisé dans différentes directions. Par exemple :

Proposition 1.1.4. *Dans les conditions de la proposition précédente, on a aussi*

$$\mu_1 h(a_1) + \cdots + \mu_p h(a_p) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} h(z)\, dz$$

si h est holomorphe sur un voisinage de K.

Démonstration. Il suffit de procéder comme pour le principe de l'argument et de remarquer que

$$\lim_{\substack{z \to a_j \\ \neq}} \frac{f'(z)}{f(z)} h(z)(z - a_j) = \mu_j h(a_j).$$

□

Exemple 1.1.5. Soit à calculer la somme S_p des puissances $p^{\text{èmes}}$ des zéros d'un polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ pour lequel $a_n \neq 0$. D'après ce qui précède, on a

$$S_p = \frac{1}{2i\pi} \int_C z^p \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz$$

où $C(0,R)$ est le cercle bordant un disque contenant tous les zéros de P. Ainsi,

$$S_p = \frac{1}{2i\pi}\int_C z^p \frac{a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}\, dz.$$

Posons $\tau = 1/z$, il vient

$$S_p = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,1/R)} \frac{1}{\tau^{p+1}} \frac{a_1\tau^{n-1} + 2a_2\tau^{n-2} + \cdots + n a_n}{a_0\tau^n + a_1\tau^{n-1} + \cdots + a_n}\, d\tau.$$

Ainsi

$$S_p = \frac{1}{p!}\left[\frac{a_1 z^{n-1} + 2a_2 z^{n-2} + \cdots + n a_n}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}\right]^{(p)}(0).$$

1.2 Théorème de Rouché

Lemme 1.2.1. *Soit h une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et soit C une courbe connexe orientée de Ω.*

(a) Si C est à bord alors C possède une origine A et une extrémité B et on a

$$\int_\Gamma h'(z)\, dz = h(B) - h(A).$$

(b) Si C est sans bord alors

$$\int_C h'(z)\, dz = 0.$$

Démonstration. Le point (a) est bien connu si C est remplacé par un arc Γ et les conclusions découlent de ce cas particulier par l'utilisation de découpages appropriés. $\square$

Théorème 1.2.2. *Soit K un compact de $\mathbb{C}$ bordé par la courbe orientée C et soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert Ω contenant K. Supposons que*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

sur C. Alors, les fonctions f et g ont le même nombre algébrique de zéros dans K.

Démonstration. Vu l'hypothèse, ni f, ni g ne peuvent s'annuler sur C. La différence entre le nombre algébrique de zéros de f et de g est donc

$$N = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz - \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz.$$

Or, sur C on a

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1.$$

Donc, pour tout $z \in C$, $f(z)/g(z)$ est dans le domaine d'holomorphie de $\ln z$ et

$$h(z) = \ln\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]$$

est holomorphe sur un voisinage de C. Sur ce voisinage, on a

$$h'(z) = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Ainsi,

$$N = \frac{1}{2i\pi}\int_C h'(z)\, dz = 0$$

vu le Lemme 1.2.1. □

1.3 Théorème de Hurwitz

Théorème 1.3.1. *Soit K un compact de $\mathbb{C}$ bordé par une courbe orientées C et soient f_m $(m \geq 0)$ et f des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ contenant K. Supposons que*

$$f_m \to f$$

uniformément sur K et que f ne s'annule pas sur C. Alors il existe $M > 0$ tel que

(i) f_m ne s'annule pas sur C,

(ii) f et f_m possèdent le même nombre algébrique de zéros dans K,

si $m \geq M$.

Démonstration. Posons

$$\delta = \inf_{z\in C} |f(z)|.$$

Comme f ne s'annule pas sur C, δ est strictement positif. Puisque f_m converge uniformément vers f sur K, il existe alors $M > 0$ tel que

$$\sup_K |f_m - f| < \delta$$

si $m \geq M$. Dans ces conditions

$$|f_m - f| < |f|$$

sur C et la conclusion résulte du Théorème 1.2.2. □

Corollaire 1.3.2. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Supposons que*

$$f_m \to f$$

dans $\mathcal{O}(\Omega)$. Supposons de plus que f_m ne s'annule pas (resp. soit injectif) sur Ω pour m suffisamment grand. Alors f est identiquement nul (resp. constant) sur Ω ou ne s'y annule pas (resp. y est injectif).

Démonstration. Traitons d'abord le cas où il existe $M > 0$ pour lequel f_m ne s'annule pas sur Ω lorsque $m \geq M$. Supposons que f ne soit pas identiquement nul sur Ω et qu'il existe $a \in \Omega$ tel que $f(a) = 0$. Dans ces conditions, a est un zéro isolé de f et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D(a,\varepsilon)} \subset \Omega$ et pour lequel f ne s'annule pas sur $\overline{D(a,\varepsilon)} \setminus \{a\}$. Vu la proposition précédente, le nombre algébrique de zéros de f et de f_m dans $\overline{D(a,\varepsilon)}$ coïncident lorsque m est suffisamment grand. Cela conduit à une contradiction puisque f_m ne s'annule pas sur Ω lorsque $m \geq M$.

Traitons à présent le cas où où il existe $M > 0$ pour lequel f_m est injectif sur Ω lorsque $m \geq M$. Supposons que f ne soit pas constant sur Ω. Fixons $z_0 \in \Omega$ et posons

$$F_m(z) = f_m(z) - f_m(z_0) \qquad \text{et} \qquad F(z) = f(z) - f(z_0).$$

Par construction $F_m \to F$ dans $\mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ et F n'est pas identiquement nul sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. Puisque F_m ne s'annule pas sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ si $m \geq M$ et que $\Omega \setminus \{z_0\}$ est connexe, ce qui précède montre que F ne s'annule pas non plus sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. Comme z_0 peut être choisi arbitrairement dans l'ouvert Ω, il s'ensuit que f est injectif sur cet ouvert. □

1.4 Structure locale d'une fonction holomorphe

Proposition 1.4.1. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \Omega$ et soit $w_0 = f(z_0)$. Supposons que z_0 soit un zéro de multiplicité $p \in \mathbb{N}_0$ de*

$$f(z) - w_0.$$

Alors il existe un voisinage ouvert U de z_0 dans Ω pour lequel

(a) *$V = f(U)$ est un voisinage ouvert de w_0 ;*

(b) *pour tout $w \in V \setminus w_0$, l'équation*

$$f(z) = w$$

possède exactement p solutions distinctes dans U.

Démonstration. On a
$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^p g(z)$$
où g est une fonction holomorphe sur Ω telle que $g(z_0) \neq 0$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que

(i) $\overline{D(z_0, \varepsilon)} \subset \Omega$;

(ii) $\inf_{z \in \overline{D(z_0,\varepsilon)}} |g(z)| = \mu > 0$

(iii) $f'(z) \neq 0$ si $z \in \overline{D(z_0, \varepsilon)} \setminus \{z_0\}$.

Si $w \in D(w_0, \mu\varepsilon^p)$ et si $z \in C(z_0, \varepsilon)$, on a
$$|(f(z) - w) - (f(z) - w_0)| = |w - w_0| < \mu\varepsilon^p \leq |f(z) - w_0|.$$
Il résulte alors du Théorème 1.2.2 que les fonctions holomorphes
$$f(z) - w \qquad \text{et} \qquad f(z) - w_0$$
ont le même nombre algébrique de zéros dans $D(z_0, \varepsilon)$. Comme $f'(z) \neq 0$ si $z \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$, $f(z) - w$ n'a que des zéros simples dans $D(z_0, \varepsilon)$ lorsque $w \in D(w_0, \mu\varepsilon^p) \setminus \{w_0\}$. Il s'ensuit que l'équation
$$f(z) = w$$
a exactement p solutions distinctes dans $D(z_0, \varepsilon)$ pour tout $w \neq w_0$ dans $D(w_0, \mu\varepsilon^p)$. Pour conclure, il suffit alors de poser
$$U = D(z_0, \varepsilon) \cap f^{-1}D(w_0, \mu\varepsilon^p) \qquad \text{et} \qquad V = D(w_0, \mu\varepsilon^p).$$
□

Corollaire 1.4.2.
(a) L'image d'un ouvert connexe par une fonction holomorphe non constante est un ouvert connexe.
(b) La dérivée d'une fonction holomorphe injective ne s'annule pas.
(c) Soit f une fonction holomorphe injective sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Alors $f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et l'inverse $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ de la bijection $f : \Omega \to f(\Omega)$ est holomorphe.

Démonstration. (a) Si f est holomorphe et non constante sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$, elle ne possède pas de zéro de multiplicité infinie. La proposition précédente montre alors que pour tout $z_0 \in \Omega$, $f(\Omega)$ est un voisinage de $w_0 = f(z_0)$ d'où la conclusion.

(b) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ dont la dérivée s'annule en $z_0 \in \Omega$. Posons $w_0 = f(z_0)$. Vu nos hypothèses, il est clair que la multiplicité de z_0 comme zéro de

$$f(z) - w_0$$

est alors infinie ou donnée par un naturel $p \geq 2$. Dans le premier cas, f est constante sur un voisinage de z_0 et ne peut donc être injective sur Ω. Dans le second cas, la Proposition 1.4.1 montre que l'équation $f(z) = w$ peut avoir plus d'une solution dans Ω et que f n'est donc pas non plus injective sur Ω.

(c) Soit f une fonction holomorphe et injective sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Comme Ω peut s'écrire comme l'union de ses composantes connexes, le point (a) montre déjà que $f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et il ne reste plus qu'à établir l'holomorphie de f^{-1} sur cet ouvert. Pour cela, considérons $z_0 \in \Omega$ et choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D(z_0, \varepsilon)} \subset \Omega$. Fixons $w \in f(D(z_0, \varepsilon))$. Vu nos hypothèses, il est clair que la fonction $f(z) - w$ possède un seul zéro dans $\overline{D(z_0, \varepsilon)}$ et que ce zéro est donné par $z = f^{-1}(w) \in D(z_0, \varepsilon)$. Il découle alors de la Proposition 1.1.4 que

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,\varepsilon)} \frac{\tau f'(\tau)}{f(\tau) - w}\, d\tau.$$

Or, grâce théorème de dérivation des intégrales paramétriques, on voit aisément que la fonction

$$w \mapsto \int_{C(z_0,\varepsilon)} \frac{\tau f'(\tau)}{f(\tau) - w}\, d\tau$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus f(C(z_0, \varepsilon))$. La conclusion en résulte. □

Proposition 1.4.3. *Dans les conditions de la Proposition 1.4.1, il existe un voisinage U de z_0 dans Ω, $\varepsilon > 0$ et une bijection holomorphe*

$$h : U \to D(0, \varepsilon)$$

tels que

$$f(z) - w_0 = h(z)^p.$$

Cela étant, pour tout $w \in D(z_0, \varepsilon^p)$, les solutions de l'équation

$$f(z) = w$$

dans U sont les images par h^{-1} des racines $p^{\text{èmes}}$ de $w - w_0$.

Démonstration. On a

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^p g(z)$$

où g est une fonction holomorphe sur Ω telle que $g(z_0) \neq 0$. Comme

$$\sqrt[p]{z}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, la fonction

$$\sqrt[p]{g(z)/g(z_0)}$$

est bien définie et holomorphe sur un voisinage ouvert U_0 de z_0. Choisissons une racine $p^{\text{ème}}$ μ de $g(z_0)$ et posons

$$h(z) = \mu(z - z_0)\sqrt[p]{g(z)/g(z_0)}.$$

Par construction, h est holomorphe sur U_0 et on a

$$h(z_0) = 0, \qquad h'(z_0) = \mu.$$

De plus, sur U_0,

$$h(z)^p = f(z) - w_0.$$

Comme $h'(z_0) \neq 0$, la Proposition 1.4.1 montre que h est injective sur un voisinage $U \subset U_0$ de z_0. Quitte à restreindre U, on peut supposer que

$$h(U) = D(0, \varepsilon)$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. On est alors dans les conditions de l'énoncé. □

Définition 1.4.4. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Conformément à l'usage, nous dirons que z_0 est *un point critique de f dans Ω* si $z_0 \in \Omega$ et si $f'(z_0) = 0$; l'image par f d'un tel point critique étant quant à elle appelée *une valeur critique de f sur Ω*.

Exemple 1.4.5. Considérons la fonction $\sin(z)$ sur $\mathbb{C}$. Puisque $\sin'(z) = \cos(z)$, il est clair que les points critiques de $\sin(z)$ dans $\mathbb{C}$ sont les zéros complexes de $\cos(z)$. Il s'agit donc des nombres de la forme $\pi/2 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme $\sin(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k$ si $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $\sin(z)$ ne possède que deux valeurs critiques sur $\mathbb{C}$ à savoir -1 et 1. Vu ce qui précède, la fonction $\sin(z)$ est donc injective sur un voisinage d'un point z_0 qui n'est pas de la forme $\pi/2 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Si $z_0 = \pi/2 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\sin''(z_0) = -\sin(z_0) = (-1)^{k+1} \neq 0$ et on est donc dans le cas $p = 2$ de la proposition précédente. Dans ce cas, $w_0 = (-1)^k$ et

$$\begin{aligned}
\sin(z) - w_0 &= (-1)^k(\sin(z - z_0 + \pi/2) - 1) \\
&= (-1)^{k+1}(1 - \cos(z - z_0)) \\
&= (-1)^{k+1}2[\sin((z - z_0)/2)]^2.
\end{aligned}$$

La fonction h de la proposition précédente peut donc être choisie égale à

$$i^{k+1}\sqrt{2}\sin\left(\frac{z-z_0}{2}\right).$$

Notons que dans ce cas, la fonction h^{-1} se calcule aisément au moyen à la fonction arcsin complexe.

2 Principe de symétrie de Schwarz

2.1 Version faible

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction holomorphe sur Ω. Notons $s_{\mathbb{R}}$ la symétrie orthogonale du plan complexe par rapport à l'axe réel. Comme

$$s_{\mathbb{R}}(z) = \overline{z}$$

il est clair que l'image d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ par $s_{\mathbb{R}}$ est l'ouvert

$$\Omega_{s_{\mathbb{R}}} = \{\overline{z} : z \in \Omega\} = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \Omega\}$$

et on vérifie aisément que la fonction

$$f_{s_{\mathbb{R}}} = s_{\mathbb{R}} \circ f \circ s_{\mathbb{R}}$$

est holomorphe sur cet ouvert.

Définition 2.1.1. Nous dirons que $\Omega_{s_{\mathbb{R}}}$ (resp. $f_{s_{\mathbb{R}}}$) est l'ouvert (resp. la fonction holomorphe) symétrique de Ω (resp. f) par rapport à $\mathbb{R}$ et que Ω (resp. f) est symétrique par rapport à $\mathbb{R}$ si $\Omega_{s_{\mathbb{R}}} = \Omega$ (resp. si $\Omega_{s_{\mathbb{R}}} = \Omega$ et si $f_{s_{\mathbb{R}}} = f$).

Remarque 2.1.2. Soit f une fonction réelle analytique sur un ouvert Ω_0 de $\mathbb{R}$. Par définition, tout point $x_0 \in \Omega_0$ possède alors un voisinage sur lequel f coïncide avec la somme de sa série de Taylor réelle. En recollant les sommes des séries de puissances naturelles

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(z - x_0)^m$$

correspondant aux différents $x_0 \in \Omega_0$, on voit aisément que f peut être étendue en une fonction g holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ contenant Ω_0. Quitte à remplacer Ω par $(\Omega \setminus \mathbb{R}) \cup \Omega_0$, on peut même supposer que $\Omega \cap \mathbb{R} = \Omega_0$. En remplaçant alors Ω par l'union de composantes connexes de $\Omega \cap \Omega_{s_{\mathbb{R}}}$ qui rencontrent $\mathbb{R}$, on se ramène au cas où l'ouvert Ω est de plus symétrique par rapport à $\mathbb{R}$ et où toutes ses composantes connexes rencontrent $\mathbb{R}$. Dans ce cas, le fait que

$$g_{s_{\mathbb{R}}} = f = g$$

sur Ω_0 combiné au principe d'unicité du prolongement holomorphe montre que g est en fait symétrique par rapport à $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que l'étude des fonctions holomorphes symétriques par rapport à $\mathbb{R}$ est équivalente à celle des fonctions analytiques réelles à valeurs réelles.

Posons

$$\Omega_+ = \{z \in \Omega : \Im z > 0\}, \qquad \Omega_0 = \{z \in \Omega : \Im z = 0\}, \qquad \Omega_- = \{z \in \Omega : \Im z < 0\}.$$

Il résulte de la définition précédente que Ω est symétrique par rapport à $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\Omega_- = s_{\mathbb{R}}(\Omega_+)$$

et que dans ce cas f est symétrique par rapport à $\mathbb{R}$ si et seulement si on a

$$f_{|\Omega_-} = s_{\mathbb{R}} \circ f_{|\Omega_+} \circ s_{\mathbb{R}}$$

et si $f_{|\Omega_0}$ est à valeurs réelles. Une fonction holomorphe sur Ω et symétrique par rapport à $\mathbb{R}$ est donc déterminée par sa restriction à $\Omega_+ \cup \Omega_0$ et cette restriction est holomorphe sur Ω_+, continue sur $\Omega_1 \cup \Omega_0$ et réelle sur Ω_0.

Le résultat suivant montre d'ailleurs que ces conditions caractérisent complètement les restrictions à $\Omega_+ \cup \Omega_0$ des fonctions holomorphes sur Ω symétriques par rapport à $\mathbb{R}$.

Proposition 2.1.3 (Principe de symétrie, version faible)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ symétrique par rapport à $\mathbb{R}$ et soit g une fonction continue sur $\Omega_+ \cup \Omega_0$, holomorphe sur Ω_+ et réelle sur Ω_0. Alors il existe une unique fonction f holomorphe sur Ω, symétrique par rapport à $\mathbb{R}$ et coïncidant avec g sur $\Omega_+ \cup \Omega_0$.*

Démonstration. Posons

$$f(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si } z \in \Omega_+ \cup \Omega_0 \\ \overline{g(\overline{z})} & \text{si } z \in \Omega_-. \end{cases}$$

Vu nos hypothèses, il est clair que f est alors continu sur Ω et que

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

pour tout $z \in \Omega$. Il est également clair que f est holomorphe sur Ω_+ et sur Ω_-. Pour conclure, il suffit donc de montrer que f est holomorphe sur un voisinage de chaque $x_0 \in \Omega_0$. Fixons un tel x_0. Puisque Ω est ouvert, il existe $R > 0$ tel que

$$\overline{D(x_0, R)} \subset \Omega.$$

Posons

$$D(x_0, R)_+ = \{z \in D(x_0, R) : \Im z > 0\}$$

et

$$D(x_0, R)_- = \{z \in D(x_0, R) : \Im z < 0\}.$$

Fixons $z \in D(x_0,R)_+ \cup D(x_0,R)_-$ et choisissons $\eta_0 > 0$ tel que

$$K_\eta = \left(\overline{D(x_0,R)}_+ + i\eta\right) \cup \left(\overline{D(x_0,R)}_- - i\eta\right) \subset \Omega$$

et pour lequel

$$z \in K_\eta^\circ$$

si $\eta \in]0,\eta_0[$. Cela étant, le théorème des résidus montre que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K_\eta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

si $\eta \in]0,\eta_0[$. Ainsi, pour $\eta \in]0,\eta_0[$, on a

$$\begin{aligned} 2i\pi f(z) = &\int_{C(x_0,R)_+ + i\eta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{[-R+i\eta,R+i\eta]} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &+ \int_{C(x_0,R)_- - i\eta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{[-R-i\eta,R-i\eta]} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \end{aligned}$$

si $C(x_0,R)_+$ (resp. $C(x_0,R)_-$) désigne le demi-cercle

$$\{z \in C(x_0,R) : \Im z \geq 0\} \qquad (\text{resp. } \{z \in C(x_0,R) : \Im z \leq 0\})$$

orienté trigonométriquement. En faisant tendre η vers 0^+ et en tenant compte de la continuité de f sur Ω, on en tire que

$$2i\pi f(z) = \int_{C(x_0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{*}$$

Puisque la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_{C(x_0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

est holomorphe sur $D(x_0,R)$ et que f est continu sur $D(x_0,R)$, l'égalité (*) a en fait lieu pour tout $z \in D(x_0,R)$. Cela montre en particulier que f est holomorphe sur un voisinage x_0. Comme x_0 peut être choisi arbitrairement dans Ω_0, la conclusion en découle. □

Bien que très joli, le résultat précédent est cependant un peu faible pour diverses applications. Nous allons voir en fait qu'il est possible de prolonger symétriquement un $f \in \mathcal{O}(\Omega_+)$ à Ω sous la seule condition que

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow x_0 \\ z \in \Omega_+}} \Im f(z) = 0$$

pour tout $x_0 \in \Omega_0$. Pour cela, nous aurons besoin des quelques résultats suivants.

2.2 Formules de Schwarz et de Poisson

Proposition 2.2.1 (Formule de Schwarz)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur $D(z_0, R)$ dont la partie réelle admet une extension continue u à $\overline{D(z_0, R)}$. Alors*

$$f(z) = i\Im f(z_0) + \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,R)} \frac{(\zeta - z_0) + (z - z_0)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\,\frac{u(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$.

Démonstration. Posons

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$$

pour tout $m \geq 0$. On sait par la formule de Taylor que

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$$

sur $D(z_0, R)$. Fixons $r \in]0, R[$. De la relation précédente, on tire que

$$f(z_0 + re^{i\theta}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{im\theta},$$

la convergence étant uniforme en θ sur $[-\pi, \pi]$. Il s'ensuit que

$$u(z_0 + re^{i\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta}$$

uniformément en θ sur $[-\pi, \pi]$ si

$$c_m = \begin{cases} \dfrac{a_m r^m}{2} & \text{pour } m > 0 \\ \Re a_0 & \text{pour } m = 0 \\ \dfrac{a_{-m} r^{-m}}{2} & \text{pour } m < 0 \end{cases}$$

De là, on tire que

$$\frac{a_m r^m}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) e^{-im\theta}\,d\theta$$

et par conséquent que

$$f(z) = i\Im a_0 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\left[(z - z_0)/re^{i\theta}\right]^m\,d\theta$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$. Pour z fixé dans $D(z_0, r)$, on a

$$\left|(z - z_0)/re^{i\theta}\right| = |z - z_0|/r < 1$$

pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$ et en utilisant les propriétés des séries géométriques, on voit que

$$f(z) = i\Im a_0 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\frac{(z - z_0)/re^{i\theta}}{1 - (z - z_0)/re^{i\theta}}\, d\theta.$$

Il s'ensuit que

$$f(z) = i\Im f(z_0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{i\theta} + (z - z_0)}{re^{i\theta} - (z - z_0)} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

En faisant tendre r vers R^-, on en tire finalement que

$$f(z) = i\Im f(z_0) + \frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{i\theta} + (z - z_0)}{Re^{i\theta} - (z - z_0)} u(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta,$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$ comme annoncé. □

Corollaire 2.2.2 (Formule de Poisson)**.** *Soit u une fonction réelle continue sur $\overline{D(z_0, R)}$ et harmonique sur $D(z_0, R)$. Alors*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|Re^{i\theta} - (z - z_0)|^2}\, u(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que u coïncide sur $D(z_0, R)$ avec la partie réelle d'une fonction holomorphe f et de prendre la partie réelle des deux membres de la formule de Schwarz associée à cette fonction. □

La formule de Schwarz montre en particulier qu'une fonction f qui est holomorphe sur $D(z_0, R)$ et dont la partie réelle admet une extension continue u à $\overline{D(z_0, R)}$ est déterminée par la donnée de sa partie imaginaire en z_0 et par celle de la restriction de u à $C(z_0, R)$. Le résultat ci-dessous montre de plus que l'on peut choisir librement ces données.

Proposition 2.2.3. *Soit φ une fonction réelle continue sur $C(z_0, R)$ et soit C une constante réelle. Alors la fonction f définie en posant*

$$f(z) = iC + \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,R)} \frac{(\zeta - z_0) + (z - z_0)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\, \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$ est holomorphe sur $D(z_0, R)$, a une partie imaginaire égale à C en z_0 et une partie réelle qui admet une extension continue u à $\overline{D(z_0, R)}$ qui coïncide avec φ sur $C(z_0, R)$.

Démonstration. Il est clair que

$$f(z) = iC + \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{Re^{i\theta}+(z-z_0)}{Re^{i\theta}-(z-z_0)}\, u(z_0+Re^{i\theta})\, d\theta$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$ et tout $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Cette relation combinée au théorème de dérivation des intégrales paramétriques montre directement que f est holomorphe sur $D(z_0, R)$. Elle montre aussi que

$$f(z_0) = iC + \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} u(z_0+Re^{i\theta})\, d\theta$$

et comme u est réel, il s'ensuit que $\Im f(z_0) = C$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$\lim_{\substack{z\longrightarrow\zeta_0\\ z\in D(z_0,R)}} \Re f(z) = u(\zeta_0)$$

pour tout $\zeta_0 \in C(z_0, R)$. Fixons donc $\zeta_0 \in C(z_0, R)$ et choisissons $\theta_0 = \arg(\zeta_0 - z_0)$. On a alors $\zeta_0 = z_0 + Re^{i\theta_0}$ et une application de la formule de Schwarz à la fonction constante $z \mapsto u(\zeta_0)$ montre que

$$u(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{Re^{i\theta}+(z-z_0)}{Re^{i\theta}-(z-z_0)}\, u(z_0+Re^{i\theta})\, d\theta.$$

Il s'ensuit que

$$\Re f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{R^2-|z-z_0|^2}{|Re^{i\theta}-(z-z_0)|^2}\, u(z_0+Re^{i\theta})\, d\theta$$

et que

$$u(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{R^2-|z-z_0|^2}{|Re^{i\theta}-(z-z_0)|^2}\, u(z_0+Re^{i\theta_0})\, d\theta.$$

Ainsi,

$$\Re f(z) - u(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{R^2-|z-z_0|^2}{|Re^{i\theta}-(z-z_0)|^2}\left[u(z_0+Re^{i\theta}) - u(z_0+Re^{i\theta_0})\right]\, d\theta.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $\eta_0 \in]0, \pi[$ suffisamment petit pour que

$$\left|u(z_0+Re^{i\theta}) - u(z_0+Re^{i\theta_0})\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

si $|\theta - \theta_0| \le \eta_0$. Pour un tel η_0, on a

$$|\Re f(z) - u(\zeta_0)| \le I_1 + I_2$$

avec

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{[\theta_0-\pi,\theta_0-\eta]\cup[\theta_0+\eta,\theta_0+\pi]} \frac{R^2 - |z-z_0|^2}{|Re^{i\theta} - (z-z_0)|^2} \left|u(z_0 + Re^{i\theta}) - u(z_0 + Re^{i\theta_0})\right| \, d\theta$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} \frac{R^2 - |z-z_0|^2}{|Re^{i\theta} - (z-z_0)|^2} \left|u(z_0 + Re^{i\theta}) - u(z_0 + Re^{i\theta_0})\right| \, d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} \frac{R^2 - |z-z_0|^2}{|Re^{i\theta} - (z-z_0)|^2} \frac{\varepsilon}{2} \, d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{R^2 - |z-z_0|^2}{|Re^{i\theta} - (z-z_0)|^2} \frac{\varepsilon}{2} \, d\theta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Comme $|\zeta_0 - z_0| = R$, il est clair que

$$\frac{R^2 - |z-z_0|^2}{|Re^{i\theta} - (z-z_0)|^2} \longrightarrow 0$$

uniformément en θ sur $[\theta_0 - \pi, \theta_0 - \eta] \cup [\theta_0 + \eta, \theta_0 + \pi]$ si $z \longrightarrow \zeta_0$ dans $D(z_0, R)$. Il en résulte que $I_1 \longrightarrow 0$ si $z \longrightarrow \zeta_0$ dans $D(z_0, R)$ et il existe donc $\eta > 0$ tel que $I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $z \in D(z_0, R)$ tel que $|z - \zeta_0| \leq \eta$. Pour un tel η, on a alors

$$|\Re f(z) - u(z)| \leq \varepsilon$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$ tel que $|z - \zeta_0| \leq \eta$. Comme $\varepsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement, la conclusion en découle. □

Corollaire 2.2.4. *Soit φ une fonction réelle continue sur $C(z_0, R)$. Alors la fonction u définie en posant*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R^2 - |z-z_0|^2}{|Re^{i\theta} - (z-z_0)|^2} \varphi(z_0 + Re^{i\theta}) \, d\theta$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$ est harmonique sur $D(z_0, R)$ et admet une extension continue à $\overline{D(z_0, R)}$ qui coïncide avec φ sur $C(z_0, R)$.

Démonstration. C'est immédiat. □

Remarque 2.2.5. Le corollaire précédent combiné au Corollaire 2.2.2 montre en fait que le problème de Dirichlet plan classique admet une et une seule solution dans le cas des disques.

2.3 Version forte

Grâce au résultat précédent, nous sommes maintenant en mesure d'établir une version plus fine du principe de symétrie.

Proposition 2.3.1 (Principe de symétrie, version forte)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ symétrique par rapport à $\mathbb{R}$ et soit f une fonction holomorphe sur Ω_+ telle que*

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow x_0 \\ z \in \Omega_+}} \Im f(z) = 0$$

pour tout $x_0 \in \Omega_0$. Alors f admet une unique extension holomorphe à Ω qui soit symétrique par rapport à $\mathbb{R}$.

Démonstration. Etendons f à $\Omega \setminus \Omega_0$ en posant $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ si $z \in \Omega_-$. Posons

$$\psi(z) = \begin{cases} \Im f(z) & \text{si } z \in \Omega \setminus \Omega_0 \\ 0 & \text{si } z \in \Omega_0 \end{cases}$$

Vu nos hypothèses, il est clair que ψ est continu sur Ω. Fixons $x_0 \in \Omega_0$ et $R > 0$ tels que $\overline{D(x_0, R)} \subset \Omega$. Posons

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,R)} \frac{(\zeta - x_0) + (z - x_0)}{(\zeta - x_0) - (z - x_0)} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - x_0} \, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{-i\theta} + (z - x_0)}{Re^{i\theta} - (z - x_0)} \psi(x_0 + Re^{i\theta}) \, d\theta \end{aligned}$$

pour tout $z \in D(x_0, R)$. Vu 2.2.3, g est holomorphe sur $D(z_0, R)$ et

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow \zeta_0 \\ z \in D(z_0,R)}} g(z) = \psi(\zeta_0)$$

pour tout $\zeta_0 \in C(x_0, R)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} g(\overline{z}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{i\theta} + (\overline{z} - x_0)}{Re^{i\theta} - (\overline{z} - x_0)} \psi(x_0 + Re^{i\theta}) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{-i\theta} + (\overline{z} - x_0)}{Re^{-i\theta} - (\overline{z} - x_0)} \psi(x_0 + Re^{-i\theta}) \, d\theta \end{aligned}$$

et comme $\psi(x_0 + Re^{-i\theta}) = -\psi(x_0 + Re^{i\theta})$, on a aussi

$$\overline{g(\overline{z})} = -g(z).$$

Il s'ensuit que

$$\Re g(x) = 0$$

pour tout $x \in]-R, R[$. Considérons maintenant la fonction

$$f - ig$$

sur $\overline{D(x_0, R)_+}$. Vu ce qui précède, il est clair que

$$\Im\left(f(z) - ig(z)\right) \to 0$$

si $z \to \zeta_0 \in C(x_0, R)_+$ ou si $z \to x_0 \in]-R, R[$ tout en restant dans $D(x_0, R)_+$. En utilisant le principe du maximum, on voit donc que

$$f(z) - ig(z)$$

est réel et donc constant sur $D(x_0, R)_+$. Comme ig est symétrique par rapport à $\mathbb{R}$ sur $D(x_0, R)$, on en tire que

$$f(z) - ig(z)$$

est constant sur $D(x_0, R) \setminus]-R, R[$. Il s'ensuit que f admet une extension holomorphe à un voisinage de chaque point $x_0 \in \Omega_0$ et cela suffit pour conclure. $\square$

2.4 Application au prolongement des fonctions holomorphes

Définition 2.4.1. Un arc Γ de $\mathbb{C}$ est *analytique* s'il possède un paramétrage

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

analytique sur $]a, b[$.

Proposition 2.4.2. *Soit Γ un arc analytique de $\mathbb{C}$ et soit z_0 un point de $\Gamma \setminus \partial\Gamma$. Alors z_0 possède un voisinage ouvert V tel que $V \setminus \Gamma$ a deux composantes connexes V_+ et V_- pour lesquelles toute fonction holomorphe f sur $V_\pm$ telle que*

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow \zeta_0 \\ z \in V_\pm}} \Re f(z) = 0 \quad \text{(resp. } \lim_{\substack{z \longrightarrow \zeta_0 \\ z \in V_\pm}} \Im f(z) = 0 \text{)}$$

pour tout $\zeta_0 \in \Gamma \cap V$ admet un prolongement holomorphe à V tout entier.

Démonstration. Soit $t_0 \in]a, b[$ tel que $\gamma(t_0) = z_0$. Comme γ est analytique sur $]a, b[$, il existe une fonction h holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $]a, b[$ qui coïncide avec γ sur cet intervalle. Puisque $\gamma'(t_0) \neq 0$, la fonction h établit une bijection biholomorphe entre un voisinage ouvert U de t_0 et un voisinage ouvert V de z_0. Quitte à restreindre U et V, on peut supposer que $U = D(t_0, \varepsilon)$, que $U \cap \mathbb{R} \subset]a, b[$ et que $V \cap \Gamma = h(U \cap \mathbb{R})$. La conclusion résulte alors de l'application de la Proposition 2.3.1 à la fonction $i(f \circ h)$ (resp. $(f \circ h)$). $\square$

3 Représentations Conformes

3.1 Définition et relations avec l'analyse complexe

Définition 3.1.1. Soient Γ_1, Γ_2 deux arcs orientés de $\mathbb{C}$ passant par P et soient τ_1, τ_2 les vecteurs tangents unitaires à Γ_1 et Γ_2 en P. On définit *l'angle orienté* de Γ_1 et Γ_2 en P comme étant l'angle orienté formé par les vecteurs τ_1 et τ_2.

Soient U, V des ouverts de $\mathbb{C}$ et soit $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme de classe C_1 (i.e. une bijection de classe C_1 dont la bijection réciproque est aussi de classe C_1). On dit que φ est une *représentation conforme (directe)* de U sur V si pour chaque $P \in U$ et chaque couple (Γ_1, Γ_2) d'arcs orientés de U se croisant en P, l'angle orienté entre $\varphi(\Gamma_1)$ et $\varphi(\Gamma_2)$ en $\varphi(P)$ est égal à l'angle orienté entre Γ_1 et Γ_2 en P.

Proposition 3.1.2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit φ une fonction complexe définie sur U. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\varphi : U \to \varphi(U)$ est une représentation conforme ;

(b) φ est holomorphe et injective.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b). On sait déjà que φ est injectif. Montrons que φ est holomorphe. Soit $z \in U$ et soit $\varepsilon < d(z, \mathbb{C} \setminus U)$. Comme les arcs orientés Γ_1, Γ_2 paramétrés par

$$\gamma_1(t) = z + t \qquad t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$
$$\gamma_2(t) = z + it \qquad t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

sont inclus dans U et que l'angle orienté entre Γ_1, Γ_2 est de mesure égale à $\pi/2$, il en est de même pour l'angle orienté entre

$$\varphi(\gamma_1(t))' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\gamma_1(t)), \qquad \varphi(\gamma_2(t))' = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\gamma_2(t))$$

en $t = 0$. Ainsi,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(z) = \mu i \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z)$$

pour un $\mu > 0$. Soit Γ_3 l'arc orienté paramétré par

$$\gamma_3(t) = z + te^{i\theta} \qquad t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

pour θ fixé dans $]0, \pi/2[$. On a

$$\varphi(\gamma_3(t))' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\gamma_3(t)) \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\gamma_3(t)) \sin \theta.$$

L'angle orienté entre Γ_1 et Γ_3 étant de mesure θ, il en est de même de l'angle orienté entre les vecteurs

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z)\cos\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(z)\sin\theta.$$

Il existe donc $\nu > 0$ tel que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z)\cos\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(z)\sin\theta = \nu e^{i\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z).$$

On en tire que

$$(\cos\theta + i\mu\sin\theta)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z) = \nu(\cos\theta + i\sin\theta)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z).$$

Puisque le jacobien de φ en z est non nul, on a $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \neq 0$. Il s'ensuit que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos\theta & = & \nu\cos\theta \\ \mu\sin\theta & = & \nu\sin\theta \end{array}\right.$$

et par conséquent que

$$\mu = \nu = 1.$$

En particulier,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0$$

sur U et φ est holomorphe.

(b) $\Rightarrow$ (a). Comme φ est holomorphe et injective, le Corollaire 1.4.2 montre que $V = \varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et que $\varphi^{-1} : V \to U$ est holomorphe. Il s'ensuit que $\varphi : U \to V$ est un difféomorphisme de classe C_∞. Soient Γ_1, Γ_2 deux arcs orientés de U passant par z et soient $\gamma_1(t)$ $(t \in I_1)$ et $\gamma_2(t)$ $(t \in I_2)$ des paramétrages orientés de Γ_1 et Γ_2. Soient $t_1 \in I_1$ et $t_2 \in I_2$ tels que

$$\gamma_1(t_1) = z = \gamma_2(t_2).$$

Si θ est la mesure de l'angle orienté entre Γ_1 et Γ_2 en z, on a

$$\gamma_2'(t_2) = \mu e^{i\theta}\gamma_1'(t_1)$$

avec $\mu > 0$. Les arcs $\varphi(\Gamma_1)$, $\varphi(\Gamma_2)$ sont paramétrés par

$$\varphi(\gamma_1(t)) \quad (t \in I_1) \qquad \text{et} \qquad \varphi(\gamma_2(t)) \quad (t \in I_2)$$

et on a

$$\varphi(\gamma_1(t))' = \varphi'(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) \quad (t \in I_1)$$
$$\varphi(\gamma_2(t))' = \varphi'(\gamma_2(t))\gamma_2'(t) \quad (t \in I_2)$$

L'angle orienté entre les arcs $\varphi(\Gamma_1)$ et $\varphi(\Gamma_2)$ en $\varphi(z)$ est donc l'angle orienté entre les vecteurs

$$\varphi'(z)\gamma_1'(t_1) \qquad \text{et} \qquad \varphi'(z)\gamma_2'(t_2).$$

Comme

$$\varphi'(z)\gamma_2'(t_2) = \mu e^{i\theta}\varphi'(z)\gamma_1'(t_1),$$

la mesure de cet angle est égale à θ. La conclusion en résulte. □

Corollaire 3.1.3. *Soit $\varphi : U \to V$ une représentation conforme. Alors u est harmonique sur V si et seulement si $u \circ \varphi$ est harmonique sur U.*

Démonstration. Supposons u harmonique sur V et $z \in U$. On sait qu'il existe un voisinage W de $\varphi(z)$ dans V et une fonction holomorphe f sur W telle que $u = \Re f$ sur W. Il s'ensuit que

$$u \circ \varphi = \Re(f \circ \varphi)$$

sur $\varphi^{-1}(W)$. Comme $f \circ \varphi$ est holomorphe sur $\varphi^{-1}(W)$, on voit que

$$u \circ \varphi$$

est harmonique au voisinage de z. La conclusion en résulte. □

Remarque 3.1.4. Le résultat précédent est à la base d'une méthode de résolution de différents problèmes de physique mathématique.

Proposition 3.1.5. *Soit $f = u + iv$ (u, v réels) une représentation conforme de U sur V. Alors pour tous α, $\beta \in \mathbb{R}$, les ensembles*

$$C_1 = \{(x, y) \in U : u(x, y) = \alpha\}$$

$$C_2 = \{(x, y) \in U : v(x, y) = \beta\}$$

sont des unions disjointes d'arcs sans bord de $\mathbb{C}$. De plus, si un arc inclus dans C_1 rencontre un arc inclus dans C_2 en $z \in U$, alors ces arcs sont orthogonaux en ce point.

Démonstration. On sait que $f^{-1} : V \to U$ est une représentation conforme. Or, $J_1 = \{t \in \mathbb{R} : (\alpha, t) \in V\}$ est une union disjointe d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et

$$C_1 = \{f^{-1}(\alpha, t) : t \in J_1\}.$$

De même, $J_2 = \{t \in \mathbb{R} : (t, \beta) \in V\}$ est une union disjointe d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et

$$C_2 = \{f^{-1}(t, \beta) : t \in J_2\}.$$

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que les arcs paramétrés par $t \mapsto (\alpha, \beta + t)$ et $t \mapsto (\alpha + t, \beta)$ pour $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ sont orthogonaux en (α, β). □

3.2 Exemples élémentaires

3.2.1 Représentations conformes affines

Soient $a \in \mathbb{C}_0$ et $b \in \mathbb{C}$. Considérons la fonction affine

$$f(z) = az + b.$$

Clairement, f est une représentation conforme de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$ d'inverse donné par

$$f^{-1}(w) = \frac{w}{a} - \frac{b}{a}.$$

Notons que si $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \,]-\pi, \pi]$, alors f est la composée de la rotation d'angle θ

$$z \mapsto e^{i\theta} z,$$

de l'homothétie de rapport r et de centre 0

$$z \mapsto rz$$

et de la translation

$$z \mapsto z + b.$$

Cette décomposition permet de visualiser facilement l'image de tout ouvert U de $\mathbb{C}$ par f.

3.2.2 Représentations conformes associées à $\exp(z)$ et $\ln(z)$

Considérons la fonction $f(z) = e^z$ et posons $\Omega = \mathbb{R} \times \,]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[$ où θ_0 est un réel fixé. Comme

$$e^z = e^x e^{iy}$$

si $z = x + iy$ (x, $y \in \mathbb{R}$), on voit aisément que

$$f(\Omega) = \mathbb{C} \setminus \,]-\infty, 0]\, e^{i\theta_0}$$

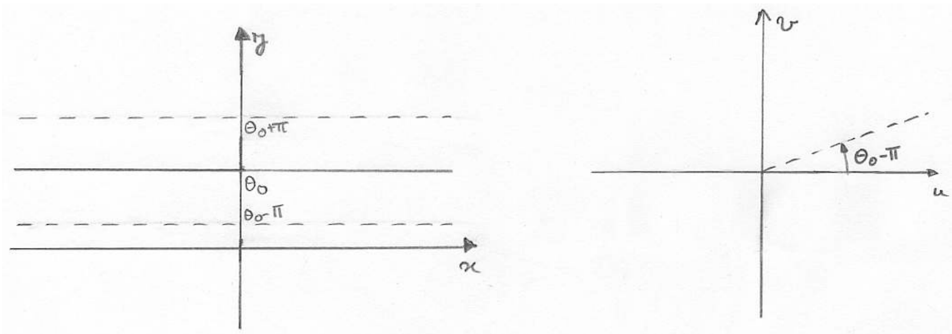
et que si on a

$$f(z) = w$$

pour $z \in \Omega$, alors

$$z = i\theta_0 + \ln(we^{-i\theta_0}) = \ln_{\theta_0}(w).$$

Il s'ensuit que f est une représentation conforme de Ω sur $f(\Omega)$ dont l'inverse est $\ln_{\theta_0}$.

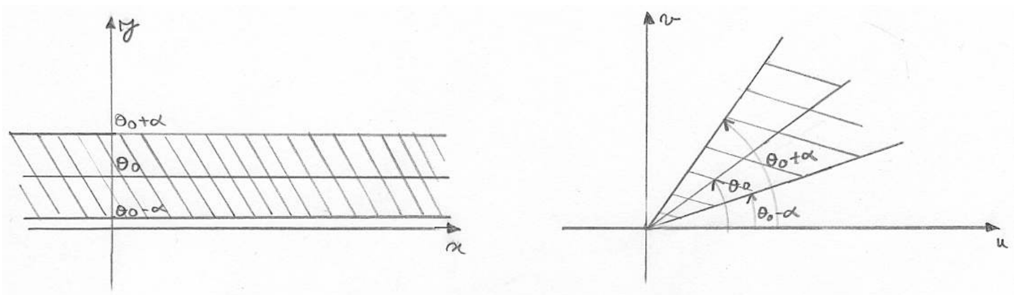


En particulier, $f : U \to f(U)$ est une représentation conforme de

$$U = \mathbb{R} \times \,]\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha[\qquad (\alpha < \pi)$$

sur l'angle ouvert plein

$$f(U) = \,]0, +\infty[\, e^{i]\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha[}.$$



3.2.3 Représentations conformes associées z^a pour $a > 0$

Soit $f(z) = z^a$ avec $a > 0$ et soit $0 < \alpha < \inf(\pi, \pi/a)$. Posons

$$U = \{z \in \mathbb{C} : -\alpha < \operatorname{Arg} z < \alpha\}$$

et

$$V = \{w \in \mathbb{C} : -a\alpha < \operatorname{Arg} w < a\alpha\}.$$

Alors, on vérifie aisément que

$$f : U \to V$$

est une représentation conforme d'inverse donné par

$$f^{-1}(w) = w^{1/a}.$$

3.2.4 Représentations conformes associées à $1/z$

Soit $f(z) = 1/z$. Clairement, $f(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}_0$ et définit une représentation conforme de $\mathbb{C}_0$ sur $\mathbb{C}_0$ dont l'inverse est défini par

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{w}.$$

(a) Posons

$$U = \{z : \langle a, z\rangle < 0\} \qquad (a \neq 0).$$

Alors,

$$f(U) = \{w : \langle \overline{a}, w\rangle < 0\}$$

En effet, si $w = 1/z$, on a

$$\langle \overline{a}, w\rangle = \Re(a\frac{1}{z}) = \frac{\Re(a\overline{z})}{|z|^2} = \frac{\langle a, z\rangle}{|z|^2};$$

d'où la conclusion.

(b) Posons

$$U = \{z : \langle a, z\rangle < \alpha\} \qquad (a \neq 0,\ \alpha > 0).$$

Alors, $f(U)$ est le complémentaire du disque fermé de centre $\overline{a}/(2\alpha)$ passant par 0. En effet, si $z \neq 0$ et si $w = 1/z$, on a

$$\begin{aligned}
\langle a, z\rangle < \alpha &\Leftrightarrow \Re(a\overline{z}) < \alpha \\
&\Leftrightarrow \Re(aw) < \alpha|w|^2 \\
&\Leftrightarrow |w|^2 - \Re(\frac{a}{\alpha}w) > 0 \\
&\Leftrightarrow \left|w - \frac{\overline{a}}{2\alpha}\right|^2 > \frac{|a|^2}{4\alpha^2};
\end{aligned}$$

d'où la conclusion.

(c) Posons

$$U = \{z : \langle a, z\rangle < \alpha\} \qquad (a \neq 0,\ \alpha < 0).$$

Alors, $f(U)$ est le disque ouvert de centre $\overline{a}/(2\alpha)$ passant par 0. Il suffit de procéder comme ci-dessus en notant que la division d'une inégalité par $\alpha < 0$ renverse cette inégalité.

(d) Soit D un disque ouvert dont le bord ne passe pas par 0. Alors, en procédant comme ci-dessus, on montre que $f(D)$ est un disque ouvert si $D \not\ni 0$ et que $f(D \backslash \{0\})$ est le complémentaire d'un disque fermé si $D \ni 0$.

3.2.5 Représentations conformes homographiques

Soit
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
avec $ad-bc \neq 0$. Si $c = 0$, f est affine et a déjà été étudiée. Si $c \neq 0$, f est holomorphe sur $U = \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ et possède un pôle simple en $-d/c$. On a $f(U) = V$ avec
$$V = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}.$$
En effet, si $z \in U$, on a
$$w = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow cwz + wd = az + b \Leftrightarrow (cw-a)z = b - wd.$$
Si $w = a/c$, il s'ensuit que $b = wd$, ce qui contredit l'hypothèse $ad - bc \neq 0$. Il s'ensuit que $f(U) \subset V$. Si $w \in V$, on voit par les mêmes arguments que
$$z = \frac{b-wd}{cw-a} \in U$$
et que $f(z) = w$. Par conséquent,
$$f : U \to V$$
est une représentation conforme. Comme
$$f(z) = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\,\frac{1}{z+\frac{d}{c}},$$
la représentation f est la composée de
$$\begin{aligned} z &\mapsto z + \frac{d}{c} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \\ z &\mapsto \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} z. \end{aligned}$$
En utilisant les propriétés des représentations conformes affines et de la représentation conforme associée à $1/z$, on trouve aisément l'image par f d'un sous-ouvert Ω de U.

3.3 Singularités isolées des représentations conformes

Lemme 3.3.1. *Soit f une application continue et relativement ouverte d'un espace topologique séparé X dans un espace topologique Y. Supposons que la f admette une restriction injective à un ouvert dense U de X. Alors f induit un homéomorphisme entre X et $f(X)$.*

Démonstration. Quitte à remplacer Y par $f(X)$, on peut supposer que f est surjective et ouverte. Dans ce cas, il suffit de démontrer que f est injective. Si ce n'est pas vrai, il existe des points distincts x_1 et x_2 de X tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Comme f est injectif sur U, il est clair que les points x_1 et x_2 ne peuvent être tous deux dans U. Soient V_1 et V_2 des voisinages ouverts disjoints de x_1 et x_2 dans X. Comme l'application f est ouverte, il est clair que

$$V_1 \cap f^{-1}(f(V_2))$$

est un voisinage de x_1 dans X et comme U est dense dans X, ce voisinage doit rencontrer U. Il existe donc $x_1' \in V_1 \cap U$ et $x_2' \in V_2$ tels que $f(x_1') = f(x_2')$.

Cela montre que l'on peut toujours supposer que $x_1 \in U$. Dans ce cas, on peut aussi supposer que $V_1 \subset U$. Comme

$$V_2 \cap f^{-1}(f(V_1))$$

est alors un voisinage de x_2 dans X et que U est dense dans X, il existe donc $x_2'' \in V_2 \cap U$ et $x_1'' \in V_1$ tels que $f(x_1'') = f(x_2'')$. Comme f est injectif sur U, cela entraîne que $x_1'' = x_2''$ en contradiction avec le fait que V_1 et V_2 sont disjoints. □

Proposition 3.3.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit z_0 un point de Ω. Supposons que f soit une fonction holomorphe et injective sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ et que z_0 soit une singularité effaçable de f. Alors f admet une extension holomorphe injective à Ω tout entier.*

Démonstration. Notons h l'extension holomorphe de f à Ω tout entier. Puisque la fonction h est injective sur $\Omega \setminus \{z_0\}$, elle ne peut être constante sur aucune composante connexe de Ω. Le Corrolaire 1.4.2 montre alors que $h : \Omega \to \mathbb{C}$ est une application ouverte. Comme $\Omega \setminus \{z_0\}$ est dense dans Ω, la conclusion résulte alors directement du lemme précédent. □

Proposition 3.3.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit z_0 un point de Ω. Supposons que f soit une fonction holomorphe et injective sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ et que z_0 soit une singularité non effaçable de f. Alors z_0 est un pôle simple de f.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $D(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$. Comme f est injectif sur $\Omega \setminus \{z_0\}$, il est clair que

$$f(D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}) \cap f(\Omega \setminus D(z_0, \varepsilon)) = \emptyset$$

et que $f(\Omega \setminus D(z_0, \varepsilon))$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Il en résulte que $f(D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\})$ ne peut être dense dans $\mathbb{C}$ et que z_0 ne peut donc être une singularité essentielle de f. Vu nos hypothèse, z_0 est donc un pôle d'ordre $p \in \mathbb{N}_0$ de f. Cela étant, quitte à diminuer ε, nous pouvons supposer que f ne s'annule pas sur $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. Dans ce cas, la fonction $1/f$ est holomorphe et injective sur $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ et z_0 en est une singularité effaçable. Désignons par g l'extension holomorphe de cette fonction à $D(z_0, \varepsilon)$. Vu ce qui précède, il est clair que g est injective et que z_0 est un zéro de multiplicité p de g. On en tire que $p = 1$ et la conclusion en découle. □

Proposition 3.3.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit S un sous-ensemble discret non vide de Ω. Supposons que f soit une fonction holomorphe et injective sur $\Omega \setminus S$ et que les points de S soient des singularités non effaçable de f. Alors $S = \{z_0\}$ et z_0 est un pôle simple de f.*

Démonstration. La proposition précédente montre déjà que les éléments de S sont des pôles simples de f. Soit Z l'ensemble des zéros de f. Vu nos hypothèses, Z est un sous-ensemble discret de Ω, la fonction $1/f$ est holomorphe et injective sur $\Omega \setminus (Z \cup S)$ et les points de S en sont des singularités effaçables. En utilisant la Proposition 3.3.2 on voit de plus que l'extension holomorphe de f à $\Omega \setminus Z$ est injective. Comme cette extension s'annule de plus en tous les points de S, on obtient aisément la conclusion. □

3.4 Représentations conformes du plan et du plan épointé

Proposition 3.4.1. *Toute représentation conforme f de $\mathbb{C}$ sur un ouvert V est de la forme*

$$f(z) = \alpha(z - a)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}_0$, $a \in \mathbb{C}$ et on a donc $V = \mathbb{C}$.

Démonstration. Soit f une fonction holomorphe et injective sur $\mathbb{C}$. La formule de Taylor montre f admet un développement de la forme

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m$$

sur $\mathbb{C}$ tout entier. Comme la fonction

$$z \mapsto f(1/z) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^{-m}$$

est aussi holomorphe et injective sur $\mathbb{C}_0$, la Proposition 3.3.3 montre que $a_m = 0$ si $m > 1$. La conclusion en résulte aisément □

Proposition 3.4.2. *Toute représentation conforme f de $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ sur un ouvert V de $\mathbb{C}$ est de la forme*

$$f(z) = \alpha(z-a) \qquad ou \qquad f(z) = \alpha\frac{1}{z-b} \qquad ou \qquad f(z) = \alpha\frac{z-a}{z-b}$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}_0$, $a \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Par translation, on peut bien sûr se ramener au cas où $b = 0$. Dans ce cas, on sait par la formule de Laurent que $f(z)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m z^m$$

sur $\mathbb{C}_0$. Vu la Proposition 3.3.3, on sait aussi que 0 est une singularité effaçable ou un pôle simple de f. Dans le premier cas, la Proposition 3.3.2 combiné à la Proposition 3.4.1 montre que f est du premier type considéré dans l'énoncé. Plaçons nous dans le second cas. On a alors $a_m = 0$ pour tout $m < -1$ et $a_{-1} \neq 0$. Comme la fonction

$$g(z) = f(1/z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m z^{-m}$$

est aussi holomorphe et injective sur $\mathbb{C}_0$, on voit, en procédant comme ci-dessus, que $a_m = 0$ pour tout $m > 1$. Il s'ensuit que

$$f(z) = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z$$

et que

$$f'(z) = -a_{-1}z^{-2} + a_1$$

sur $\mathbb{C}_0$. On doit donc avoir $a_1 = 0$, car sinon f' posséderait donc deux zéros dans $\mathbb{C}_0$ en contradiction avec l'injectivité de f. Il s'ensuit que f est bien de la forme annoncée. □

3.5 Représentations conformes du disque unité sur lui-même

Rappelons que $D = D(0,1)$ désigne le disque de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{C}$.

Définition 3.5.1. Pour tout $a \in D$, nous noterons φ_a l'homographie

$$z \mapsto \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Proposition 3.5.2. *Pour tout $a \in D$, φ_a induit une représentation conforme de D sur D dont l'inverse est induit par φ_{-a}. De plus :*

(i) $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi'_a(a) = \dfrac{1}{1-|a|^2}$;

(ii) $\varphi_a(0) = -a$, $\varphi'_a(0) = 1 - |a|^2$.

Démonstration. Comme $a \in D$, $1/\overline{a} \notin \overline{D}$ et φ_a est holomorphe sur D. De plus, si $z \in D$, on a

$$|\varphi_a(z)| = \frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|}.$$

Donc, pur $z \in D$,

$$|\varphi_a(z)| < 1 \Leftrightarrow |z-a| < |1-\overline{a}z| \Leftrightarrow (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) < (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z})$$

et cette dernière égalité est satisfaite puisqu'elle est équivalente à

$$(1-|a|^2)(1-|z|^2) > 0.$$

Il s'ensuit que $\varphi_a(D) \subset D$. Comme un calcul direct permet de vérifier que

$$\varphi_{-a} \circ \varphi_a = \mathrm{id}$$

sur D, on voit que $\varphi_a : D \to D$ et $\varphi_{-a} : D \to D$ sont des représentations conformes inverses l'une de l'autre. Il est clair que $\varphi_a(a) = 0$ et $\varphi_a(0) = -a$. Comme

$$\varphi'_a(z) = \frac{(1-\overline{a}z) + (z-a)\overline{a}}{(1-\overline{a}z)^2} = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2},$$

on voit que l'on a aussi

$$\varphi'_a(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$$

et que

$$\varphi'_a(0) = 1-|a|^2.$$

□

Lemme 3.5.3 (Schwarz)**.** *Soit $f : D \to D$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$ et soit $z_0 \in D \setminus \{0\}$. Alors, on a*

(i) $|f'(0)| \leq 1$;

(ii) $|f(z_0)| \leq |z_0|$.

De plus, (i) (resp. (ii)) devient une égalité si et seulement si f est une rotation de centre 0.

Démonstration. Comme $f(0) = 0$, la fonction

$$\frac{f(z)}{z} : D \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

possède une unique extension holomorphe $g(z)$ à D. Pour tout $R < 1$, le principe du maximum du module montre que

$$\sup_{z \in \overline{D(0,R)}} |g(z)| = \sup_{z \in C(0,R)} |g(z)| \leq \frac{1}{R}.$$

On en tire que

$$|g(z)| \leq 1/R$$

pour tout $z \in \overline{D(0,R)}$. En faisant tendre R vers 1 par valeurs inférieures on voit en fait que

$$|g(z)| \leq 1$$

pour tout $z \in D$. Comme

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{si } z \in D \setminus \{0\} \\ \lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ \neq}} \dfrac{f(z)}{z} = f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

on en déduit aussitôt que $|f(z_0)| \leq |z_0|$ et que $|f'(0)| \leq 1$. Ainsi (i) et (ii) sont établis.

Supposons à présent que (i) ou (ii) soit une égalité. Vu ce qui précède la fonction $|g|$ atteint alors sa valeur maximum 1 en un point de D et le principe du maximum du module entraîne que $g(z)$ est constant sur D. Il s'ensuit que

$$f(z) = cz$$

avec $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| = 1$. La conclusion en résulte. □

Corollaire 3.5.4. *Les seules représentations conformes de D sur D laissant l'origine fixe sont les rotations de centre* 0.

Démonstration. Soit $f : D \to D$ une représentation conforme telle que $f(0) = 0$. Vu le lemme précédent, on a

$$|f(z)| \leq |z|$$

pour tout $z \in D$. Pour la même raison on a aussi

$$|f^{-1}(z)| \leq |z|$$

pour tout $z \in D$. Il s'ensuit que

$$|f(z)| = |z|$$

sur D et le lemme précédent montre que

$$f(z) = cz$$

avec $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| = 1$. La conclusion en résulte. □

Proposition 3.5.5. *Soit $f : D \to D$ une représentation conforme. Posons $a = f^{-1}(0)$ et $\theta = \arg f'(a)$. Alors*

$$f(z) = e^{i\theta}\varphi_a(z)$$

pour tout $z \in D$.

Démonstration. Posons

$$g = e^{-i\theta} f \circ \varphi_a^{-1}.$$

Par construction, g est une représentation conforme de D sur D pour laquelle on a $g(0) = 0$ et

$$g'(0) = e^{-i\theta} f'(a)/\varphi_a'(a) = e^{-i\theta} f'(a)(1 - |a|^2) > 0$$

Vu 3.5.4 on a donc

$$g(z) = z$$

sur D d'où la conclusion. □

Corollaire 3.5.6. *Pour tous z_0, $w_0 \in D$ et tout $\theta_0 \in \,]-\pi, \pi]$, il existe une et une seule représentation conforme $f : D \to D$ telle que*

$$f(z_0) = w_0$$

et pour laquelle $\arg f'(z_0) = \theta_0$. Cette représentation conforme est donnée par

$$f(z) = \varphi_{w_0}^{-1}(e^{i\theta_0}\varphi_{z_0}(z)).$$

Démonstration. Soit f une représentation conforme ayant les propriétés considérées. Posons

$$g = \varphi_{w_0} \circ f.$$

On a alors $g(z_0) = 0$ et

$$g'(z_0) = \varphi'_{w_0}(w_0) f'(z_0) = \frac{1}{1 - |w_0|^2} f'(z_0).$$

Il s'ensuit que $\arg g'(z_0) = \arg f'(z_0) = \theta_0$ et la proposition précédente montre que

$$g = e^{i\theta_0} \varphi_a.$$

En particulier

$$f(z) = \varphi_{w_0}^{-1}(e^{i\theta_0} \varphi_{z_0}(z))$$

pour tout $z \in D$. La réciproque est immédiate. □

Proposition 3.5.7. *Soit $f : D \to D$ une application holomorphe et soit $z_0 \in D$. Alors on a*

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2};$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si f est une représentation conforme.

Démonstration. Posons $w_0 = f(z_0)$ et

$$g(z) = \varphi_{w_0} \circ f \circ \varphi_{z_0}^{-1}.$$

Par construction, g est une application holomorphe de D dans D et $g(0) = 0$. Le lemme 3.5.3 montre donc que

$$|\varphi'_{w_0}(w_0)||f'(z_0)| \frac{1}{|\varphi'_{z_0}(z_0)|} = |g'(0)| \leq 1.$$

Ainsi

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1 - |w_0|^2}{1 - |z_0|^2}. \tag{*}$$

De plus le même lemme montre que (*) est en fait une égalité si et seulement si $g(z) = cz$ avec $c \in \mathbb{C}$ et $|c| = 1$. Vu le Corollaire 3.5.4, cette condition est satisfaite si et seulement si g est une bijection. Ainsi (*) est une égalité si et seulement si f est une représentation conforme. □

3.6 Théorème de Riemann-Koebe

Notre but dans cette section est de déterminer les ouverts de $\mathbb{C}$ qui admettent une représentation conforme sur le disque unité. Vu la Proposition 3.4.1, nous savons déjà qu'un tel ouvert doit être propre et comme un tel ouvert est de plus homéomorphe à D, il doit aussi être simplement connexe. En fait, nous allons voir que ces deux conditions nécessaires sont aussi suffisantes.

Etablissons tout d'abord un résultat auxiliaire important.

Théorème 3.6.1 (Montel)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $\mathcal{F}$ un borné de $\mathcal{O}(\Omega)$ (i. e. une partie de $\mathcal{O}(\Omega)$ telle que*

$$\sup_{z\in K}\sup_{f\in\mathcal{F}}|f(z)| < +\infty$$

pour tout compact K de Ω). Alors de toute suite de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite qui converge dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

Démonstration. L'hypothèse entraîne que $\mathcal{F}$ est simplement bornée sur Ω. De plus, il résulte de l'inégalité des accroissements finis et des inégalités de Cauchy que $\mathcal{F}$ est équicontinu sur Ω. Vu le Théorème A.1.4, on en tire que de toute suite de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de Ω. La conclusion en résulte. □

Cela étant, nous pouvons passer au résultat principal de cette section :

Théorème 3.6.2 (Riemann-Koebe)**.** *Soit Ω un ouvert connexe propre de $\mathbb{C}$. Supposons que toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sans zéro dans Ω possède une racine carrée holomorphe sur Ω. Alors, il existe une représentation conforme de $f : \Omega \to D$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des injections holomorphes $f : \Omega \to D$.

Montrons que $\mathcal{F}$ est non vide. Vu nos hypothèses, il existe $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ et pour un tel a il existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que $g^2(z) = z - a$. Par construction, g est injective et $g(\Omega) \cap -g(\Omega) = \emptyset$. Comme g est non constante, $g(\Omega)$ et $-g(\Omega)$ sont des ouverts de $\mathbb{C}$. L'ouvert Ω étant non vide on en tire qu'il existe un disque fermé $\overline{D(b,R)}$ de $\mathbb{C}$ disjoint de $g(\Omega)$. Puisque

$$z \mapsto \frac{R}{z-b}$$

induit une représentation conforme de $\mathbb{C} \setminus \overline{D(b,R)}$ sur $D \setminus \{0\}$, la fonction

$$f(z) = \frac{R}{g(z)-b}$$

est une injection holomorphe de Ω dans D.

Vu la définition de $\mathcal{F}$, il est clair que

$$\sup_{g\in\mathcal{F}} |g| \leq 1.$$

Fixons $z_0 \in \Omega$. Comme $\mathcal{F}$ est un borné non vide de $\mathcal{O}(\Omega)$,

$$M = \sup_{g\in\mathcal{F}} |g'(z_0)|$$

est un réel strictement positif. Par définition des bornes supérieures, il existe une suite $(g_m)_{m\geq 0}$ de $\mathcal{F}$ telle que $|g'_m(z_0)| \to M$. Vu le Théorème 3.6.1, on sait que l'on peut extraire de $(g_m)_{m\geq 0}$ une sous-suite $(g_{m_k})_{k\geq 0}$ qui converge dans $\mathcal{O}(\Omega)$ vers une limite f telle que $|f'(z_0)| = M$ et pour laquelle $f(\Omega) \subset \overline{D}$. Il s'ensuit que f n'est pas constante sur Ω et que $f(\Omega) \subset D$. De plus, comme g_{m_k} est injective pour tout $k \geq 0$, le Corollaire 1.3.2 montre que f est injective sur Ω.

Montrons que $f(\Omega) = D$. Si ce n'est pas le cas il existe $a \in D \setminus f(\Omega)$. Cela étant, $\varphi_a \circ f$ ne s'annule pas sur Ω et vu nos hypothèses il existe $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que $F^2 = \varphi_a \circ f$. De cette relation on tire que F est injective sur Ω et que $F(\Omega) \subset D$. De plus, on a

$$f = \varphi_a^{-1} \circ S \circ F$$

où $S : D \to D$ est la fonction $z \mapsto z^2$. Posons $w_0 = F(z_0)$ et réécrivons la relation précédente sous la forme

$$f = (\varphi_a^{-1} \circ S \circ \varphi_{w_0}^{-1})(\varphi_{w_0} \circ F).$$

L'application $\Phi = \varphi_a^{-1} \circ S \circ \varphi_{w_0}^{-1} : D \to D$ étant holomorphe et non injective, la proposition 3.5.7 montre que

$$|\Phi'(0)| < 1 - |\Phi(0)|^2 \leq 1.$$

Il s'ensuit que

$$|f'(z_0)| = |\Phi'(0)||(\varphi_{w_0} \circ F)'(z_0)| < |(\varphi_{w_0} \circ F)'(z_0)|;$$

ce qui est absurde puisque $\varphi_{w_0} \circ F \in \mathcal{F}$. □

La condition imposée à l'ouvert Ω dans le théorème précédent peut paraître un peu curieuse. En fait, la proposition suivante montre qu'elle est équivalente à d'autres conditions, en apparence plus fortes, mais en fait équivalentes.

Proposition 3.6.3. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et considérons les conditions suivantes :*

(a) L'ouvert Ω est simplement connexe ;

(b) Toute fonction holomorphe sur Ω possède une primitive holomorphe sur Ω ;

(c) Toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sans zéro dans Ω possède un logarithme holomorphe sur Ω ;

(d) Toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sans zéro dans Ω possède une racine carrée holomorphe sur Ω.

Alors, (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (d). De plus, si Ω est non vide et différent de $\mathbb{C}$, chacune de ses conditions est équivalente à l'existence d'une représentation conforme de Ω sur D.

Démonstration. On sait déjà que (a) $\Longrightarrow$ (b) et il est évident que (c) $\Longrightarrow$ (d).

Montrons que (b) $\Longrightarrow$ (c). Soit f une fonction holomorphe sur Ω qui ne s'annule pas sur cet ouvert. La fonction f'/f est alors holomorphe sur Ω et il existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que

$$g' = f'/f$$

sur Ω. On en tire que

$$(fe^{-g})' = f'e^{-g} - fe^{-g}g' = 0.$$

Comme Ω est connexe, il s'ensuit qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$f = ce^{g} = e^{g+\ln c}$$

sur Ω. La fonction f possède donc bien un logarithme holomorphe sur Ω.

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que la condition (a) étant satisfaite pour D, elle le sera aussi pour Ω s'il existe une représentation conforme de Ω sur D. □

Compte tenu de ce qui a été dit dans la section précédente, il est clair que la représentation conforme dont l'existence a été établie dans le théorème de Riemann-Koebe n'est pas unique. On a cependant le résultat suivant :

Proposition 3.6.4. *Soit $w_0 \in D$ et soit $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$. Dans les conditions du théorème de Riemann-Koebe, on peut exiger que $f(z_0) = w_0$ et que $\arg f'(z_0) = \theta_0$. Dans ce cas, la représentation conforme cherchée est unique.*

Démonstration. Si $f_0 : \Omega \to D$ est une représentation conforme alors toute représentation conforme $f : \Omega \to D$ peut s'écrire $f = \varphi \circ f_0$ où $\varphi : D \to D$ est une représentation conforme. La conclusion résulte donc du corollaire 3.5.6. □

Exemples 3.6.5. En utilisant les transformations conformes élémentaires étudiées plus haut, on trouve aisément des représentations conformes d'un demi-plan, d'un angle plein ou d'une bande sur D :
(a) Si

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\},$$

on peut prendre

$$\varphi(z) = \frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$$

car

(i) $z \mapsto z + 1$ transforme Ω en

$$\Omega_1 = \{z : \Re z > 1\};$$

(ii) $z \mapsto 1/z$ transforme Ω_1 en

$$\Omega_2 = \{z : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\};$$

(iii) $z \mapsto 1 - 2z$ transforme Ω_2 en

$$D(0,1) = \{z : |z| < 1\}.$$

(b) Si $\alpha \in]0, 2\pi[$ et si

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\alpha/2 < \arg z < \alpha/2\},$$

on peut prendre

$$\varphi(z) = \frac{z^{\pi/\alpha} - 1}{z^{\pi/\alpha} + 1}$$

car

(i) $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ transforme Ω en

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\};$$

(ii) $z \mapsto \dfrac{z-1}{z+1}$ transforme Ω_1 en

$$D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

(c) Si
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 1\},$$
on peut prendre
$$\varphi(z) = \frac{-ie^{i\pi z} - 1}{-ie^{i\pi z} + 1} = \frac{e^{i\pi z} - i}{e^{i\pi z} + i}$$
car

(i) $z \mapsto i\pi z$ transforme Ω en
$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im z < \pi\};$$

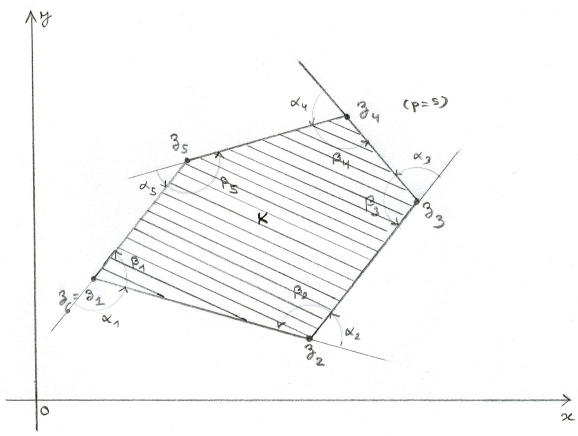
(ii) $z \mapsto e^z$ transforme Ω_1 en
$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\};$$

(iii) $z \mapsto -iz$ transforme Ω_2 en
$$\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} = \Re z > 0\};$$

(iv) $z \mapsto \dfrac{z-1}{z+1}$ transforme Ω_3 en
$$D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

3.7 Formule de Schwarz-Christoffel pour les polygones convexes

Soit K un compact polygonal convexe dont les sommets $z_1, \dots, z_p$ sont numérotés de sorte que K soit bordé par la courbe orientée
$$C = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup \dots \cup [z_p, z_1]$$
et convenons de poser $z_{p+1} = z_1$ et $z_0 = z_p$.



Notons Ω l'intérieur de K et α_j (resp. β_j) la mesure de l'angle extérieur (resp. intérieur) en z_j pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. Par construction, $\alpha_j \in]0, \pi[$ (resp. $\beta_j \in]0, \pi[$) et coïncide avec la mesure de l'angle orienté formé par les complexes $z_j - z_{j-1}$ et $z_{j+1} - z_j$ (resp. $z_{j+1} - z_j$ et $z_{j-1} - z_j$) pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. De plus, $\beta_j = \pi - \alpha_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$ et on a

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = 2\pi \quad \text{et} \quad \beta_1 + \cdots + \beta_p = (p-2)\pi.$$

Comme Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, le théorème de Riemann montre qu'il existe une représentation conforme f de Ω sur $D(0,1)$.

3.7.1 Comportement au bord

Proposition 3.7.1. *Toute représentation conforme f de Ω sur $D(0,1)$ s'étend en un homéomorphisme*

$$f : K \to \overline{D(0,1)}.$$

De plus,

$$t \mapsto f(z_j + t(z_{j+1} - z_j)) \qquad (t \in]0,1[)$$

est un paramétrage orienté de classe C_1 de l'arc sans bord joignant $f(z_j)$ à $f(z_{j+1})$.

Démonstration. Comme

$$f : \Omega \to D(0,1)$$

est un homéomorphisme, il est clair que

$$f^{-1}\left(\overline{D(0, 1-\varepsilon)}\right)$$

est un compact de Ω pour tout $\varepsilon \in]0,1[$. Il existe donc $\eta > 0$ pour lequel on a

$$1 - \varepsilon < |f(z)| < 1$$

pour tout $z \in \Omega$ tel que $d(z, C) < \eta$. Cela montre en particulier que

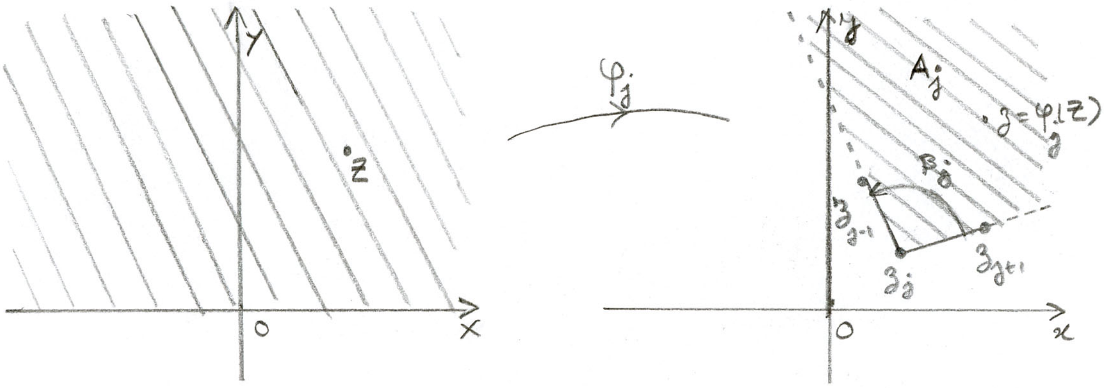
$$\lim_{\substack{z \longrightarrow \zeta_0 \\ z \in \Omega}} |f(z)| = 1$$

pour tout $\zeta_0 \in C$. Il résulte alors directement du Lemme 3.7.2 ci-dessous que f admet une extension continue à $K \setminus \{z_1, \ldots, z_p\}$.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, posons $\theta_j = \arg(z_{j+1} - z_j)$ et

$$\varphi_j(Z) = z_j + e^{i\theta_j} Z^{\beta_j/\pi}$$

Fixons $j \in \{1, \ldots, p\}$.



Par construction, φ_j établit une représentation conforme entre le demi-plan ouvert

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$$

et l'angle ouvert A_j associé au sommet z_j. De plus, cette représentation conforme s'étend en un homéomorphisme entre $\overline{H}$ et $\overline{A_j}$. En appliquant le Lemme 3.7.2 ci-dessous à la restriction de $f \circ \varphi_j$ à un demi-disque centré à l'origine et de rayon suffisamment petit, on voit alors que

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow z_j \\ z \in K \setminus \{z_1,\ldots,z_p\}}} f(z)$$

existe et est finie.

Comme le raisonnement ci-dessus fonctionne pour tous les $j \in \{1, \ldots, p\}$, on en tire que f admet une extension continue à K.

En exploitant complètement le lemme 3.7.2, on voit même que cette extension, que nous noterons encore f, est une application ouverte de K dans $\overline{D(0,1)}$ qui envoie C dans $C(0,1)$. Il résulte alors du Lemme 3.3.1 que f est injective sur K.

Une dernière application du Lemme 3.7.2 montre que

$$t \mapsto f(z_j + t(z_{j+1} - z_j)) \qquad (t \in \,]0,1[)$$

est un paramétrage orienté de classe C_1 de l'arc sans bord joignant $f(z_j)$ à $f(z_{j+1})$.

Il en résulte qu'il existe des réels $\psi_1 < \cdots < \psi_p < \psi_{p+1}$ tels que $\psi_{j+1} - \psi_j \leq 2\pi$ et pour lesquels

$$f(z_j) = e^{i\psi_j} \quad \text{ et } \quad f(]z_j, z_{j+1}[) = \{e^{i\psi} : \psi \in \,]\psi_j, \psi_{j+1}[\}$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. Comme les arcs sans bord

$$f(]z_1, z_2[), \ldots, f(]z_p, z_{p+1}[)$$

sont deux à deux disjoints, on a $\psi_{p+1} - \psi_1 \leq 2\pi$. Comme on a aussi $z_{p+1} = z_1$, il est alors clair que $\psi_{p+1} = \psi_1 + 2\pi$ et que $f(C) = C(0,1)$. Comme $f(\Omega) = D(0,1)$, cela montre que

$$f : K \to \overline{D(0,1)}$$

est surjective. La conclusion résulte alors de la compacité de K. $\square$

Lemme 3.7.2. *Soit $f : D(x_0, R)_+ \to D(0,1) \setminus \{0\}$ une injection holomorphe telle que*

$$|f(z)| \to 1$$

si $z \to x \in]x_0 - R, x_0 + R[$ dans $D(x_0, R)_+$. Alors f admet une et une seule extension holomorphe F à $D(x_0, R)$ telle que

$$F(z) = \frac{1}{\overline{F(\overline{z})}}$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$. Cette extension est injective et on a

$$F(D(x_0, R)_-) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)} \qquad \text{et} \qquad F(]x_0 - R, x_0 + R[) \subset C(0,1)$$

ce qui entraine en particulier que

$$F : D(x_0, R)_+ \cup]x_0 - R, x_0 + R[\to \overline{D(0,1)}$$

est ouverte. De plus, pour tout $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$, $f'(x)$ est un vecteur tangent orienté trigonométriquement de $C(0,1)$ en $f(x)$.

Démonstration. Comme $D(x_0, R)_+$ est convexe et comme f ne s'annule pas sur $D(x_0, R)_+$, il existe une fonction holomorphe g sur $D(x_0, R)_+$ telle que

$$f = e^{ig}.$$

Pour un tel g, on a

$$|f| = e^{-\Im g}$$

et nos hypothèses entrainent que

$$\Im g \geq 0$$

sur $D(x_0, R)_+$ et que

$$\Im g(z) \to 0$$

si $z \to x \in]x_0 - R, x_0 + R[$. La version forte du principe de symétrie de Schwarz montre alors que g admet une unique extension holomorphe G à $D(x_0, R)$ qui soit symétrique par rapport à $\mathbb{R}$. Posons

$$F(z) = e^{iG(z)}$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$. Par construction, F est une extension holomorphe de f à $D(z_0, R)$ et on a

$$F(z) = e^{iG(z)} = e^{i\overline{G(\overline{z})}} = \frac{1}{\overline{F(\overline{z})}}$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$ et c'est bien sûr la seule extension holomorphe de f à $D(z_0, R)$ à jouir de cette propriété. Il résulte de cette relation que $F(x) \in C(0,1)$ si $x \in \,]x_0 - R, x_0 + R[$, que $F(z) \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$ si $z \in D(x_0, R)_-$ et que F est injective sur $D(x_0, R)_-$.

Comme l'application $F : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ est holomorphe et non constante, elle est aussi continue et ouverte et ce qui précède montre que l'application

$$F : D(x_0, R)_+ \cup D(x_0, R)_- \to \mathbb{C}$$

injective. Il résulte alors du Lemme 3.3.1 que F injective sur $D(z_0, R)$; ce qui entraîne que F' ne s'annule pas sur $D(z_0, R)$.

Vu l'équation de Cauchy-Riemann, on a

$$\frac{\partial \Re G}{\partial x} = \frac{\partial \Im G}{\partial y}$$

sur $D(x_0, R)$. Comme on a $\Im G \geq 0$ sur $D(x_0, R)_+$ et $\Im g = 0$ sur $]x_0 - R, x_0 + R[$, il est clair que

$$G'(x) = \frac{\partial \Re G}{\partial x} = \frac{\partial \Im G}{\partial y} \geq 0$$

sur $]x_0 - R, x_0 + R[$. Il s'ensuit que

$$F'(x) = e^{iG(x)} iG'(x) = iF(x)G'(x)$$

si $x \in \,]x_0 - R, x_0 + R[$; d'où la conclusion. □

3.7.2 Formule d'inversion

Proposition 3.7.3. *Soit f une représentation conforme de Ω sur $D(0,1)$, soit*

$$g : D(0,1) \to \Omega$$

sa représentation réciproque. Etendons f et g continûment à $\overline{\Omega}$ et $\overline{D(0,1)}$ et posons $w_j = f(z_j)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, p\}$, choisissons $\gamma_j \in \,]-\pi, \pi]$ de sorte que la demi-droite

$$\{w_j + \lambda e^{i\gamma_j} : \lambda \leq 0\}$$

ne rencontre pas $D(0,1)$*. Alors, il existe* $C \in \mathbb{C}$ *tel que*

$$g'(w) = \frac{C}{(w-w_1)_{\gamma_1}^{\alpha_1/\pi} \cdots (w-w_p)_{\gamma_p}^{\alpha_p/\pi}}$$

pour tout $w \in D(0,1)$ *et on a*

$$g(w) = g(0) + C \int_{[0,w]} \frac{dw}{(w-w_1)_{\gamma_1}^{\alpha_1/\pi} \cdots (w-w_p)_{\gamma_p}^{\alpha_p/\pi}}$$

pour tout $w \in \overline{D(0,1)}$*.*

Démonstration. Conservons les notations introduites dans la preuve de la Proposition 3.7.1.

Dans cette preuve, nous avons vu que f admet un prolongement injectif à un voisinage de chaque point de $C \setminus \{z_1, \ldots, z_p\}$. Il s'ensuit que g admet un prolongement holomorphe au voisinage de chaque point de $C(0,1) \setminus \{w_1, \ldots, w_p\}$.

Fixons $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Nous savons qu'il existe $R_j > 0$ tel que $\varphi_j(D(0,R_j)_+) \subset \Omega$ et pour lequel $f \circ \varphi_j$ admet une extension holomorphe injective F_j à $D(0,R_j)$ telle que $F_j(D(0,R_j)_-) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$. Posons $V_j = F_j(D(0,R_j))$ et notons $G_j : V_j \to D(0,R_j)$ la réciproque de $F_j : D(0,R_j) \to V_j$. Par construction, V_j est un voisinage ouvert de w_j et $V_j \cap D(0,1) = F_j(D(0,R_j)_+)$.

Fixons $w \in V_j \cap D(0,1)$ et posons $Z = G_j(w)$ et $z = \varphi_j(Z)$. Alors, $Z \in D(0,R_j)_+$, $z = z_j + e^{i\theta_j} Z^{\beta_j/\pi} \in \Omega$ et $f(z) = w$. Il s'ensuit que

$$g(w) = z_j + e^{i\theta_j} G_j(w)^{\beta_j/\pi}.$$

Puisque G_j est holomorphe sur V_j, que $G_j(w_j) = 0$ et que $G_j'(w_j) \neq 0$, il existe H_j holomorphe sur V_j tel que $H_j(w_j) \neq 0$ et pour lequel

$$G_j(w) = (w - w_j) H_j(w).$$

Posons $\kappa_j = \arg H_j(w_j)$. Quitte à diminuer R_j, nous pouvons supposer que $H_j(w) \in \mathbb{C} \setminus \left]-\infty, 0\right] e^{i\kappa_j}$ pour tout $w \in V_j$. Dans ce cas, $H_j(w)_{\kappa_j}^{\beta_j/\pi}$ est holomorphe sur V_j et il existe $k_j \in \mathbb{Z}$ tel que

$$G_j(w)^{\beta_j/\pi} = (w-w_j)_{\gamma_j}^{\beta_j/\pi} H_j(w)_{\kappa_j}^{\beta_j/\pi} e^{2ik_j\beta_j}$$

sur $V_j \cap D(0,1)$. En particulier, il existe g_j holomorphe sur V_j, tel que $g_j(w_j) \neq 0$ et pour lequel

$$g(w) = z_j + (w-w_j)_{\gamma_j}^{\beta_j/\pi} g_j(w)$$

sur $V_j \cap D(0,1)$. Cela entraîne que

$$\begin{aligned} g'(w) &= (\beta_j/\pi)(w-w_j)_{\gamma_j}^{(\beta_j/\pi)-1} g_j(w) + (w-w_j)_{\gamma_j}^{\beta_j/\pi} g_j'(w) \\ &= (w-w_j)_{\gamma_j}^{-\alpha_j/\pi} \left[(\beta_j/\pi) g_j(w) + (w-w_j) g_j'(w)\right] \end{aligned}$$

sur $V_j \cap D(0,1)$ et que

$$(w-w_j)_{\gamma_j}^{\alpha_j/\pi} g'(w)$$

admet une extension holomorphe à V_j qui ne s'annule pas en w_j. Comme j peut être fixé arbitrairement dans $\{1,\dots,p\}$, ce qui précède montre que

$$(w-w_1)_{\gamma_1}^{\alpha_1/\pi} \cdots (w-w_p)_{\gamma_p}^{\alpha_p/\pi} g'(w)$$

admet une extension holomorphe h à un voisinage V de $\overline{D(0,1)}$ qui ne s'annule en aucun point de ce voisinage.

Quitte à restreindre V, on peut supposer que $V = D(0,r)$ avec $r > 1$. Dans ce cas, il existe l holomorphe sur V et tel que

$$h = e^l.$$

Nous allons montrer que $\Im l$ est constant sur $C(0,1)$. Cela entraînera que l est constant sur V. Il en sera donc de même de h et nous aurons établi qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que

$$g'(w) = \frac{C}{(w-w_1)_{\gamma_1}^{\alpha_1/\pi} \cdots (w-w_p)_{\gamma_p}^{\alpha_p/\pi}}$$

et la conclusion découlera de la continuité de g et de l'intégrabilité de

$$w \mapsto \frac{C}{(w-w_1)_{\gamma_1}^{\alpha_1/\pi} \cdots (w-w_p)_{\gamma_p}^{\alpha_p/\pi}}$$

sur les segments de la forme $[0,w]$ avec $w \in \overline{D(0,1)}$.

Fixons $j \in \{1,\dots,p\}$. On sait que

$$\psi \mapsto e^{i\psi} \qquad (\psi \in]\psi_j, \psi_{j+1}[)$$

est un paramétrage orienté de l'arc sans bord allant de w_j à w_{j+1}. Fixons $k \in \{1,\dots,p\}$. Comme

$$e^{i\psi} - w_k = e^{i\psi} - e^{i\psi_k} = e^{i\frac{\psi+\psi_k}{2}} 2i \sin\frac{\psi-\psi_k}{2}$$

il existe une constante c_{jk} telle que

$$\arg_{\gamma_k}(e^{i\psi} - w_k) = \frac{\psi}{2} + c_{jk}$$

sur $]\psi_j, \psi_{j+1}[$. Comme

$$\psi \mapsto g(e^{i\psi}) \qquad (\psi \in]\psi_j, \psi_{j+1}[)$$

est un paramétrage orienté de classe C_1 du segment sans bord $]z_j, z_{j+1}[$, il est clair que

$$\left[g'(e^{i\psi})ie^{i\psi}\right] / \left[z_{j+1} - z_j\right]$$

est strictement positif si $\psi \in]\psi_j, \psi_{j+1}[$. Il s'ensuit que

$$g'(e^{i\psi}) = \lambda e^{i(\theta_j - \psi - \frac{\pi}{2})}$$

si $\psi \in]\psi_j, \psi_{j+1}[$. Ainsi, il existe $\mu > 0$ tel que

$$(e^{i\psi} - w_1)_{\gamma_1}^{\alpha_1/\pi} \dots (e^{i\psi} - w_p)_{\gamma_p}^{\alpha_p/\pi} g'(e^{i\psi}) = \mu e^{i\left[\alpha_1/\pi(\frac{\psi}{2}+c_{j1})+\dots+\alpha_p/\pi(\frac{\psi}{2}+c_{jp})+\theta_j-\psi-\frac{\pi}{2}\right]}$$

si $\psi \in]\psi_j, \psi_{j+1}[$. Comme

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p = 2\pi$$

il s'ensuit que la fonction $\Im l$ est constante sur l'arc sans bord allant de w_j à w_{j+1}.

Puisque j peut être choisi arbitrairement dans $\{1, \dots, p\}$ et que $\Im l$ est continue sur V, il est lors clair que $\Im l$ est constant sur $C(0, 1)$. □

3.7.3 Passage au demi-plan de Poincaré

Soit $H = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ le demi-plan de Poincaré.

Considérons une représentation conforme

$$\varphi : D(0, 1) \to H$$

et notons

$$\psi : H \to D(0, 1)$$

la représentation réciproque. Il existe alors $a, b \in C(0, 1)$, $c \in H$ et $d \in \mathbb{C} \setminus \overline{H}$ tels que $ad = bc$ et pour lesquels on a

$$\varphi(w) = d\frac{w - a}{w - b} \quad \text{et} \quad \psi(\underline{w}) = b\frac{\underline{w} - c}{\underline{w} - d}$$

pour tout $w \in D(0, 1)$ et tout $\underline{w} \in H$. Cela étant, dans les conditions de la Proposition 3.7.3, l'application $\underline{f} = \varphi \circ f$ est une représentation conforme de Ω sur H dont la réciproque est donnée par $\underline{g} = g \circ \psi$. De plus, il résulte de ce qui précède que $\underline{g}$ s'étend en un homéomorphisme entre $\overline{H}$ et $K \setminus \{b\}$ et que l'on a

$$(g \circ \psi)'(\underline{w}) = g'(\psi(\underline{w}))\psi'(\underline{w}) = \frac{C\psi'(\underline{w})}{(\psi(\underline{w}) - w_1)_{\gamma_1}^{\alpha_1/\pi} \cdots (\psi(\underline{w}) - w_p)_{\gamma_p}^{\alpha_p/\pi}}$$

Supposons que $b \notin \{w_1, \ldots, w_p\}$ et posons $\underline{w}_1 = \varphi(w_1)$, $\ldots$, $\underline{w}_p = \varphi(w_p)$. On a alors

$$\psi(\underline{w}) - w_j = \psi(\underline{w}) - \psi(\underline{w}_j) = \frac{b(c-d)}{(\underline{w}_j - d)} \frac{(\underline{w} - \underline{w}_j)}{(\underline{w} - d)}$$

et

$$\psi'(\underline{w}) = \frac{b(c-d)}{(\underline{w} - d)^2}.$$

Il en résulte qu'il existe $\ell_j \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\frac{1}{(\psi(\underline{w}) - w_j)_{\gamma_j}^{\alpha_j/\pi}} = \frac{(\underline{w}_j - d)^{\alpha_j/\pi}}{b^{\alpha_j/\pi}(c-d)^{\alpha_j/\pi}} \frac{(\underline{w} - d)^{\alpha_j/\pi}}{(\underline{w} - \underline{w}_j)^{\alpha_j/\pi}} e^{2i\ell_j\alpha_j}$$

pour tout $\underline{w} \in H$. En tenant compte du fait que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = 2\pi$, on en déduit alors aisément que

$$\underline{g}'(\underline{w}) = \frac{\underline{C}}{(\underline{w} - \underline{w}_1)^{\alpha_1/\pi} \cdots (\underline{w} - \underline{w}_p)^{\alpha_p/\pi}}$$

sur H pour une constante $\underline{C}$ bien choisie.

Supposons maintenant que $b = w_j$ pour un $j \in \{1, \ldots p\}$ et posons $\underline{w}_k = \varphi(w_k)$ pour tout $k \neq j$ dans $\{1, \ldots p\}$. On a alors

$$\psi(\underline{w}) - w_k = \psi(\underline{w}) - \psi(\underline{w}_k) = \frac{b(c-d)}{(\underline{w}_k - d)} \frac{(\underline{w} - \underline{w}_k)}{(\underline{w} - d)}$$

si $k \neq j$ et

$$\psi(\underline{w}) - w_j = \frac{b(d-c)}{(\underline{w} - d)}.$$

En procédant comme ci-dessus, on en tire qu'il existe une constante $\underline{C}$ telle que

$$\underline{g}'(\underline{w}) = \frac{\underline{C}}{(\underline{w} - \underline{w}_1)^{\alpha_1/\pi} \cdots \widehat{(\underline{w} - \underline{w}_j)^{\alpha_j/\pi}} \cdots (\underline{w} - \underline{w}_p)^{\alpha_p/\pi}}$$

sur H.

Cela étant, le résultat suivant est alors immédiat.

Proposition 3.7.4. *Soit $\underline{f}$ une représentation conforme de Ω sur H et soit*

$$\underline{g} : H \to \Omega$$

sa représentation réciproque. Alors, il existe un point z_∞ de la frontière de K pour lequel $\underline{f}$ peut être étendu en un homéomorphisme $\underline{f} : K \setminus \{z_\infty\} \to \overline{H}$ dont l'homéomorphisme réciproque $\underline{g} : \overline{H} \to K \setminus \{z_\infty\}$ est une extension continue de $\underline{g}$ à $\overline{H}$. De plus, si $z_\infty \notin \{z_1, \cdots, z_p\}$, il existe une constante $\underline{C}$ telle que

$$\underline{g}(\underline{w}) = \underline{g}(0) + \underline{C} \int_{[0,\underline{w}]} \frac{d\underline{w}}{(\underline{w} - \underline{w}_1)^{\alpha_1/\pi} \cdots (\underline{w} - \underline{w}_p)^{\alpha_p/\pi}}$$

sur $\overline{H}$ *et si* $z_\infty = z_j$ *pour un* $j \in \{1, \ldots, p\}$ *alors il existe une constante* $\underline{C}$ *telle que*

$$\underline{g}(\underline{w}) = \underline{g}(0) + \underline{C} \int_{[0,\underline{w}]} \frac{d\underline{w}}{(\underline{w} - \underline{w}_1)^{\alpha_1/\pi} \cdots \widehat{(\underline{w} - \underline{w}_j)^{\alpha_j/\pi}} \cdots (\underline{w} - \underline{w}_p)^{\alpha_p/\pi}}$$

sur $\overline{H}$*.*

3.8 Etude directe d'une intégrale de Schwarz-Christoffel

Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ des réels et soient $\mu_1, \ldots, \mu_p$ des éléments de $]0, 1[$ tels que $\mu_1 + \cdots + \mu_p = 2$. Posons

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$$

et

$$f(z) = \frac{1}{(z - x_1)^{\mu_1} \cdots (z - x_p)^{\mu_p}}$$

pour tout $z \in \overline{H} \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$. Par construction, il est clair que f est holomorphe sur H, continue sur $\overline{H} \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$ et intégrable sur tout segment $[z_1, z_2]$ de $\overline{H}$. De plus, si z_1, z_2, z_3 sont trois points distincts de $\overline{H}$, on vérifie aisément en combinant le théorème de Cauchy et les lemmes d'encoches que

$$\int_{[z_1,z_3]} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{[z_1,z_2]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z_2,z_3]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Définissons F sur $\overline{H}$ en posant

$$F(z) = \int_{[0,z]} f(\zeta)\, d\zeta$$

pour tout $z \in \overline{H}$. Vu ce qui précède,

$$F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta$$

si z et z_0 sont dans $\overline{H}$. Pour $z_0 \in H$, cette relation montre de suite que F est une primitive holomorphe de f sur H. Pour $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$, elle montre que

$$|F(z) - F(z_0)| \leq |z - z_0| \sup_{\overline{D(z_0,R)} \cap \overline{H}} |f|$$

si z est voisin de z_0. Enfin, pour $z_0 = x_j$ avec $j \in \{1, \ldots, p\}$, elle montre que

$$F(z) - F(x_j) = \int_0^1 \frac{(z - x_j)}{(t(z - x_j) + x_j - x_1)^{\mu_1} \cdots (t(z - x_j) + x_j - x_p)^{\mu_p}}\, dt$$

et par conséquent que

$$\begin{aligned}|F(z)-F(x_j)| &\le \int_0^1 \frac{|z-x_j|}{\prod_{k\neq j}(|x_j-x_k|-|z-x_j|)^{\mu_k}\,(t|z-x_j|)^{\mu_j}}\,dt\\ &\le \frac{|z-x_j|^{1-\mu_j}}{(1-\mu_j)\prod_{k\neq j}(|x_j-x_k|-|z-x_j|)^{\mu_k}}\end{aligned}$$

pour z voisin de x_j dans $\overline{H}\setminus\{x_j\}$. Il s'ensuit que F est continu sur $\overline{H}$.

Soient maintenant $\theta>\theta_0$ deux éléments de $]0,\pi[$, $R>0$ et $z=Re^{i\theta}$, $z_0=Re^{i\theta_0}$. Puisque

$$F(z)-F(z_0)=\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

le théorème des résidus montre que

$$F(z)-F(z_0)=\int_{C_R} f(\zeta)\,d\zeta$$

où C_R est l'arc orienté de $C(0,R)$ joignant z_0 à z. Puisque

$$|f(z)|\sim\frac{1}{|z|^2}$$

pour $z\to\infty$ dans $\overline{H}$, il résulte du lemme des grandes encoches que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $R_\varepsilon>0$ tel que

$$|F(z)-F(z_0)|\le\varepsilon$$

si $R\ge R_\varepsilon$. Puisque F est continu sur $\overline{H}$, il s'ensuit que pour tout $\varepsilon>0$ il existe R_ε tel que

$$|F(z)-F(z_0)|\le\varepsilon$$

si z est un point de module R de $\overline{H}$ et si $R\ge R_\varepsilon$. Il s'ensuit que

$$F(\infty)=\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\overline{H}}} F(z)$$

existe et est égal à la fois à

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad\text{et à}\quad \int_0^{-\infty} f(x)\,dx.$$

Etudions à présent le comportement de F sur $\mathbb{R}$. Si $x\in\,]x_j,x_{j+1}[$ pour $j\in$

$\{1, \ldots, p-1\}$, on a

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_j) &= \int_{x_j}^{x} \frac{d\xi}{(\xi - x_1)^{\mu_1} \cdots (\xi - x_p)^{\mu_p}} \\ &= \int_{x_j}^{x} \frac{e^{-i(\mu_{j+1}+\cdots+\mu_p)\pi}\, d\xi}{(\xi - x_1)^{\mu_1} \cdots (\xi - x_j)^{\mu_j} (x_{j+1} - \xi)^{\mu_{j+1}} \cdots (x_p - \xi)^{\mu_p}} \\ &= e^{i(\mu_1+\cdots+\mu_j)\pi} \int_{x_j}^{x} \frac{d\xi}{(\xi - x_1)^{\mu_1} \cdots (\xi - x_j)^{\mu_j} (x_{j+1} - \xi)^{\mu_{j+1}} \cdots (x_p - \xi)^{\mu_p}} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$x \mapsto F(x) \qquad (x \in \,]x_j, x_{j+1}[)$$

est un paramétrage orienté de classe C_∞ du segment orienté sans bord $]F(x_j), F(x_{j+1})[$ et que ce segment a $e^{i(\mu_1+\cdots+\mu_j)\pi}$ comme vecteur directeur orienté. On vérifie de même que

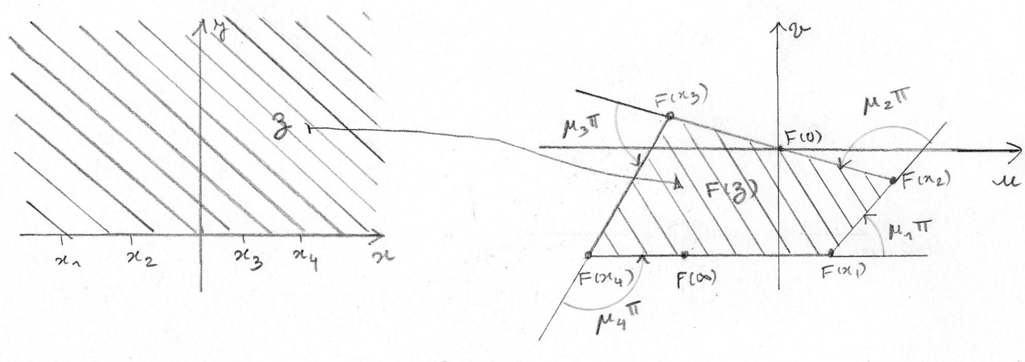
$$x \mapsto F(x) \quad (x \in \,]-\infty, x_1[) \qquad (\text{resp. } x \mapsto F(x) \quad (x \in \,]x_p, +\infty[))$$

sont des paramétrages de classe C_∞ du segment ouvert

$$]F(\infty), F(x_1)[\qquad (\text{resp. }]F(x_p), F(\infty)[)$$

et que ce segment à 1 comme vecteur directeur orienté. Il résulte alors du Lemme 3.8.1 ci-dessous que les points $F(z_1), F(z_2), \ldots, F(z_p), F(z_1)$ définissent une ligne polygonale orientée C qui est simple et qui borde un compact polygonal convexe K, les angles orientés extérieurs correspondants étant de mesures respectives

$$\mu_1\pi, \mu_2\pi, \ldots, \mu_p\pi.$$



Fixons $w_0 \in \mathbb{C} \setminus C$. Comme $w_0 \neq F(\infty)$, il existe $R > 0$ tel que $F^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{w_0\}) \supset \overline{H} \setminus D(0, R)$. Comme $w_0 \notin F(\mathbb{R})$, $F^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{w_0\})$ est aussi un voisinage ouvert de $\mathbb{R}$ dans $\overline{H}$ et il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$F^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{w_0\}) \supset [-R, R] + i\,[0, \eta]\,.$$

Cela étant, il est clair que

$$F^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{w_0\}) \supset \mathbb{C} \setminus (D(0,R)_+ + i\eta)$$

et par conséquent que

$$F^{-1}(w_0) \subset D(0,R)_+ + i\eta.$$

Il s'ensuit que $F^{-1}(w_0)$ est fini et le principe de l'argument montre que

$$\#F^{-1}(w_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial(\overline{D(0,R)_+ + i\eta})} \frac{F'(z)}{F(z) - w_0}\, dz.$$

Posons $x_{p+1} = x_1$ et choisissons $\theta_1, \ldots, \theta_p \in \,]-\pi, \pi]$ de sorte que

$$w_0 + \,]-\infty, 0]\, e^{i\theta_j} \cap [F(x_j), F(x_{j+1})] = \emptyset$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. Alors, si R est suffisamment grand et η suffisamment petit il est clair que $w_0 +]-\infty, 0]\, e^{i\theta_j}$ est disjoint de $F([x_j, x_{j+1}] + i\eta)$ pour $j \in \{1, \ldots, p-1\}$ et de

$$F([x_p, R] + i\eta) \cup F(C(0,R)_+ + i\eta) \cup F([-R, x_1] + i\eta)$$

pour $j = p$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
2\pi\#F^{-1}(w_0) = \sum_{j=1}^{p-1} & \Big[\arg_{\theta_j}(F(x_{j+1} + i\eta) - w_0) - \arg_{\theta_j}(F(x_j - i\eta) - w_0)\Big] \\
& + \Big[\arg_{\theta_p}(F(R + i\eta) - w_0) - \arg_{\theta_p}(F(x_p + i\eta) - w_0)\Big] \\
& + \Big[\arg_{\theta_p}(F(x_1 + i\eta) - w_0) - \arg_{\theta_p}(F(-R + i\eta) - w_0)\Big] \\
& + \Big[\arg_{\theta_p}(F(-R + i\eta) - w_0) - \arg_{\theta_p}(F(R + i\eta) - w_0)\Big] \\
= \sum_{j=1}^{p} & \arg_{\theta_j}(F(x_{j+1} + i\eta) - w_0) - \arg_{\theta_j}(F(x_j + i\eta) - w_0).
\end{aligned}$$

En faisant tendre η vers 0^+, on en tire finalement que

$$\#F(w_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{p} \arg_{\theta_j}(F(x_{j+1}) - w_0) - \arg_{\theta_j}(F(x_j) - w_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{dw}{w - w_0}.$$

On a donc

$$\#F(w_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } w_0 \in K^\circ \\ 0 & \text{si } w_0 \in \mathbb{C} \setminus K \end{cases}$$

Cela montre que

$$F(\overline{H}) \subset K$$

et que

$$K^\circ \subset F(H).$$

Comme F est non constant sur H, on sait aussi que $F(H)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Il s'ensuit que $F(H) = K^\circ$ et que

$$F : H \to K^\circ$$

est une bijection holomorphe. Enfin, puisque

$$F : \mathbb{R} \to C \setminus \{F(\infty)\}$$

est une bijetion, on voit que l'application

$$F : \overline{H} \to K \setminus \{F(\infty)\}$$

est également bijective.

Lemme 3.8.1. *Soient* $z_1, \ldots, z_p$ *des points de* $\mathbb{C}$. *Convenons de poser* $z_0 = z_p$ *et* $z_{p+1} = z_1$ *et de noter* α_j *la mesure de l'angle orienté entre* $z_j - z_{j-1}$ *et* $z_{j+1} - z_j$ *pour tout* $j \in \{1, \ldots, p\}$. *Supposons que* $\alpha_j \in]0, \pi[$ *pour tout* $j \in \{1, \ldots, p\}$ *et que*

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = 2\pi.$$

Alors la ligne polygonale $z_1, \ldots, z_p$ *est simple et borde un compact polygonal convexe.*

Démonstration. Il suffit de montrer que les points $z_2, \ldots, z_{p-1}$ sont tous dans le demi-plan ouvert situé à la gauche de la droite orientée $z_p z_1$ puisque l'on obtient alors le résultat en permutant cycliquement les points donnés.

Quitte à appliquer une rotation et une translation aux points donnés, on peut bien sûr supposer que z_p et z_1 sont réels. Dans ce cas, si J est le plus grand $j \in \{1, \ldots, p\}$ tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_j < \pi$, il est clair que

$$\Im z_{j+1} > \Im z_j$$

pour les $j \in \{1, \ldots, J\}$ et que

$$\Im z_{j+1} \leq \Im z_j$$

pour les $j \in \{J + 1, \ldots, p - 1\}$. On en tire que $\Im z_2 > 0, \ldots, \Im z_{p-1} > 0$ et la conclusion en découle. $\square$

3.9 Application à l'inversion d'une intégrale elliptique

Fixons $k \in]0,1[$. Dans son étude des intégrales elliptiques (voir **??**), A. M. Legendre a été amené à s'intéresser à l'intégrale

$$\underline{F}(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

pour $x \in]-1,1[$. Cette intégrale est appelée *intégrale elliptique de Legendre de première espèce* et est souvent calculée au moyen de l'intégrale

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

via la formule

$$\underline{F}(x) = F(\arcsin x).$$

Comme $k \in]0,1[$, la fonction $\varphi \mapsto F(\varphi)$ est en fait définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Elle y est de plus clairement impaire strictement croissante et de classe C_∞. Comme la fonction $\theta \mapsto \sin^2\theta$ est périodique de période π, on a aussi

$$F(\varphi+\pi) = F(\varphi) + F(\pi)$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$. On a bien sûr

$$F(\pi) = 2K$$

où

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} > 0$$

désigne l'intégrale elliptique complète de première espèce de Legendre. Il s'ensuit que

$$\lim_{\varphi\longrightarrow\pm\infty} F(\varphi) = \pm\infty$$

et que la fonction

$$\varphi \mapsto F(\varphi)$$

établit un difféomorphisme de classe C_∞ entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$. Suivant Jacobi, nous appellerons *amplitude* et noterons

$$u \mapsto \mathrm{am}(u)$$

le difféomorphisme réciproque.

Par construction, il est clair que la fonction amplitude de Jacobi est impaire, strictement croissante et de classe C_∞ et que

$$\mathrm{am}(u+2K) = \mathrm{am}(u) + \pi$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$. On en tire aisément que

$$x \mapsto F(x)$$

établit un difféomorphisme de classe C_∞ entre $]-1,1[$ et $]-K,K[$ dont le difféomorphisme réciproque est donné par la fonction sinus d'amplitude de Jacobi

$$u \mapsto \mathrm{sn}(u) := \sin(\mathrm{am}(u)).$$

Essayons à présent d'étendre les résultats précédents au domaine complexe. Pour cela, remarquons d'abord que, puisque

$$\underline{F}(x) = -\frac{1}{k}\int_0^x \frac{d\xi}{\left(\xi+\frac{1}{k}\right)^{1/2}(\xi+1)^{1/2}(\xi-1)^{1/2}\left(\xi-\frac{1}{k}\right)^{1/2}}$$

pour tout $x \in]-1,1[$, il résulte de l'étude de la formule de Schwarz-Christoffel qu'il est possible d'étendre la fonction $x \mapsto \underline{F}(x)$ à $\overline{H}$ en posant

$$\underline{F}(z) = -\frac{1}{k}\int_0^z \frac{d\zeta}{\left(\zeta+\frac{1}{k}\right)^{1/2}(\zeta+1)^{1/2}(\zeta-1)^{1/2}\left(\zeta-\frac{1}{k}\right)^{1/2}}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Im z \geq 0$ et que cette extension sera continue sur $\overline{H}$, holomorphe sur H et établira un homéomorphisme entre $\overline{H}$ et un rectangle fermé de $\mathbb{C}$ privé d'un point de sa frontière. Pour préciser l'image de $\overline{H}$, il suffit de calculer $\underline{F}(-1/k)$, $\underline{F}(-1)$, $\underline{F}(1)$, $\underline{F}(1/k)$ et $\underline{F}(\infty)$. On sait déjà que $\underline{F}(1) = K$ et on a

$$\underline{F}(1/k) - \underline{F}(1) = i\int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = iK'$$

avec $K' > 0$. Il s'ensuit que $\underline{F}(1/k) = K + iK'$. De même, on a $\underline{F}(-1) = -K$ et

$$\underline{F}(-1) - \underline{F}(-1/k) = -i\int_{-1/k}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = -iK'$$

et on en tire que $\underline{F}(-1/k) = -K + iK'$. Enfin,

$$F(\infty) - F(1/k) = -\int_{1/k}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}$$

et en posant $\xi = 1/(kx)$ on voit que

$$F(\infty) - F(1/k) = -\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-k^2\xi^2)(1-\xi^2)}} = -K.$$

Il s'ensuit que
$$\underline{F}(\underline{H}) = ([-K, K] + i\,[0, K']) \setminus \{iK'\}$$
et que
$$\underline{F}^{-1} : ([-K, K] + i\,[0, K']) \setminus \{iK'\} \to \overline{H}$$
constitue une extension continue bien définie de $\mathrm{sn}_{|[-K,K]}$ qui est holomorphe sur $]-K, K[\, + \, i\,]0, K'[$. Dans la suite, nous noterons encore sn cette extension. Par construction, il est clair que sn est réel sur la frontière du rectangle
$$[-K, K] + i\,[0, K']$$
privée de iK' et que
$$\lim_{\substack{w \longrightarrow iK' \\ w \in ([-K,K]+i[0,K']) \setminus \{iK'\}}} \mathrm{sn}\, w = \infty.$$
Etendons maintenant continûment sn à $([-K, K] + i\,[-K', K']) \setminus \{\pm iK'\}$ en posant
$$\mathrm{sn}(w) = \overline{\mathrm{sn}(\overline{w})}$$
si $\Im z \leq 0$. En vertu du principe de symétrie de Schwarz, il est clair que cette extension sera holomorphe sur $]-K, K[\, + \, i\,]-K', K'[$. Par construction, il est clair que
$$\mathrm{sn}(u - iK') = \mathrm{sn}(u + iK')$$
pour tout $u \in [-K, K] \setminus \{0\}$. Il s'ensuit que l'on peut prolonger continûment sn à $([-K, K] + i\mathbb{R}) \setminus \{(2k + 1)iK' : k \in \mathbb{Z}\}$ en posant
$$\mathrm{sn}(w) = \mathrm{sn}(w - 2kiK')$$
pour tout $z \in [-K, K] + i\,[(2k - 1)K', (2k + 1)K']$ et le principe de symétrie de Schwarz montre que cette extension est holomorphe sur $(]-K, K[+i\mathbb{R})\setminus\{(2k+1)iK' : k \in \mathbb{Z}\}$. Comme elle est aussi réelle sur $K + i\mathbb{R}$, une nouvelle application du principe de symétrie montre que sn peut être étendue continûment à
$$([-K, 3K] + i\mathbb{R}) \setminus \{(2k + 1)iK' + 2lK : k \in \mathbb{Z}, l \in \{0, 1\}\}$$
en posant
$$\mathrm{sn}(w) = \overline{\mathrm{sn}(2K - \overline{w})}$$
pour tout $w \in ([K, 3K] + i\mathbb{R}) \setminus \{(2K + (2k + 1)iK' : k \in \mathbb{Z}\}$ et que cette extension sera holomorphe sur $([-K, 3K] + i\mathbb{R}) \setminus \{(2k + 1)iK' + 2lK : k \in \mathbb{Z}, l \in \{0, 1\}\}$. Comme on aura de plus
$$\mathrm{sn}(3K + iv) = \mathrm{sn}(-K + iv)$$

pour tout $v \in \mathbb{R}$, on peut finalement étendre continûment sn à

$$\mathbb{C} \setminus \underbrace{\{2lK + (2k+1)iK' : k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}\}}_{S}$$

en posant

$$\operatorname{sn}(w) = \operatorname{sn}(w - 4jK)$$

pour tout $w \in [(4j-1)K, (4j+3)K] + i\mathbb{R} \setminus S$. De plus, vu le principe de symétrie de Schwarz, cette extension sera holomorphe sur

$$\mathbb{C} \setminus S.$$

Nous sommes donc parvenu à étendre la fonction sn qui était à l'origine définie sur $\mathbb{R}$ en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus S$. Par construction, on a même

$$\operatorname{sn}(w + j4K) = \operatorname{sn} w$$

$$\operatorname{sn}(w + k2iK') = \operatorname{sn} w$$

pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus S$ et

$$\lim_{\substack{w \longrightarrow s \\ w \in \mathbb{C} \setminus S}} \operatorname{sn}(w) = \infty$$

pour tout $s \in S$. Il s'ensuit que sn est une fonction méromorphe impaire et bi-périodique sur $\mathbb{C}$ dont S est l'ensemble des pôles et dont les zéros sont simples et de la forme

$$2lK + 2kiK'$$

avec $l \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Etudions l'ordre du pôle iK'. Pour cela, remarquons d'abord que si $x > 1/k$, on a

$$F(x) - iK' = \int_x^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(k^2\xi^2-1)}}.$$

Comme

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi^2-1)(k^2\xi^2-1)}} \sim \frac{1}{k\xi^2}$$

si $\xi \to +\infty$. On en tire que pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, $\exists R_\varepsilon > 1/k$ pour lequel on a

$$\frac{1-\varepsilon}{k\xi^2} \leq \frac{1}{\sqrt{(\xi^2-1)(k^2\xi^2-1)}} \leq \frac{1+\varepsilon}{k\xi^2}$$

si $\xi \geq R_\varepsilon$. Il s'ensuit que pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on a

$$\frac{1-\varepsilon}{k\xi^2} \leq \int_x^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(k^2\xi^2-1)}} \leq \frac{1+\varepsilon}{k\xi^2}$$

si $x \geq R_\varepsilon$ et par conséquent que

$$\underline{F}(x) - iK' \sim \frac{1}{kx}$$

si $x \to +\infty$. Cette relation montre que

$$\mathrm{sn}(w)(w - iK') \to \frac{1}{k}$$

si $w \to iK'$ dans $]iK', K + iK'[$ et on en tire que iK' est un pôle simple de sn de résidu égal à $1/k$.

4 Théorème de Runge et surjectivité de l'opérateur $\partial/\partial\overline{z}$

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à deux problèmes assez différents et pourtant très étroitement liés.

Le premier d'entre eux consiste à déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un compact K de l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ soit tel que toute fonction holomorphe sur un voisinage de K soit limite uniforme sur K d'une suite de fonctions holomorphes sur Ω.

Quant au second problème, il consiste à montrer que l'équation de Cauchy-Riemann non homogène

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g \qquad (\text{resp. } \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = G)$$

possède toujours une solution $f \in C_\infty(\Omega)$ (resp. $F \in D_\infty(\Omega)'$) quel que soit $g \in C_\infty(\Omega)$ (resp. $G \in D_\infty(\Omega)'$).

Pour résoudre ces deux problèmes, nous allons d'abord déterminer une solution élémentaire de l'opérateur $\partial/\partial\overline{z}$. Celle-ci nous permettra de résoudre l'équation de Cauchy-Riemann non-homogène lorsque le second membre est une distribution à support compact dans Ω. Un raisonnement par dualité nous conduira alors au théorème de densité de Runge grâce auquel nous pourrons obtenir la surjectivité de $\partial/\partial\overline{z}$ dans les deux cas considérés ci-dessus.

4.2 Solution élémentaire usuelle de l'opérateur $\partial/\partial\overline{z}$

Proposition 4.2.1. *La fonction*

$$z \mapsto \frac{1}{\pi z}$$

est localement intégrable sur $\mathbb{C}$ et la distribution E qui lui est associée est une solution élémentaire de l'opérateur $\partial/\partial\overline{z}$ i.e. on a

$$\frac{\partial E}{\partial \overline{z}} = \delta_0$$

Démonstration. Par passage en coordonnées polaires, on voit directement que

$$\int_{D(0,\varepsilon)} \frac{1}{|z|}\, dxdy = \int_0^\varepsilon \left[\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right] dr = 2\pi\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Il s'ensuit aisément que $1/(\pi z)$ est localement intégrable sur $\mathbb{C}$. Soit $\varphi \in D_\infty(\mathbb{C})$ et soit R le rayon d'un disque ouvert de centre 0 contenant le support de φ. En utilisant la forme complexe de la formule de Green-Riemann, on voit aisément que

$$2i\int_{\overline{D(0,R)}\setminus D(0,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right)\, dxdy = \int_{C(0,R)} \frac{\varphi(z)}{z}\, dz - \int_{C(0,\varepsilon)} \frac{\varphi(z)}{z}\, dz$$

pour tout $\varepsilon \in]0, R[$. Comme $\operatorname{supp}\varphi \subset D(0,R)$, il s'ensuit que

$$2\int_{\mathbb{C}\setminus D(0,\varepsilon)} \frac{1}{z}\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}\, dxdy = -\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta$$

et un passage à la limite pour $\varepsilon \to 0^+$ montre que

$$2\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z}\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}\, dxdy = -2\pi\varphi(0);$$

d'où la conclusion. □

Remarque 4.2.2. Le résultat précédent peut aussi être vu comme une conséquence de la formule de représentation de Pompeiu (voir Proposition A.2.1).

4.3 Equation $\partial F/\partial\overline{z} = G$ avec G à support compact

Grâce à la solution élémentaire étudiée ci-dessus, on obtient directement le résultat suivant :

Proposition 4.3.1. *Pour toute distribution $G \in D_\infty(\mathbb{C})'$ dont le support est compact, on a*

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(E * G) = G = E * \frac{\partial G}{\partial \overline{z}}.$$

Démonstration. Cela résulte directement de ce que

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(E * G) = \frac{\partial E}{\partial \overline{z}} * G = E * \frac{\partial G}{\partial \overline{z}}$$

puisque $\partial E/\partial\overline{z} = \delta_0$ et que $\delta_0 * G = G$. □

Remarque 4.3.2. Il découle de la proposition précédente que pour toute distribution $G \in D_\infty(\Omega)'$ (resp. toute fonction $g \in C_\infty(\Omega)$) et tout $z_0 \in \Omega$ il existe un voisinage ouvert U de z_0 et une distribution $F \in D_\infty(U)'$ (resp. une fonction $f \in C_\infty(U)$) telle que

$$\partial F/\partial\overline{z} = G \qquad (\text{resp.} \quad \partial f/\partial\overline{z} = g \quad)$$

car G (resp. g) coïncide sur un voisinage de z_0 avec φG (resp. φg) si φ est une fonction bien choisie de $D_\infty(\Omega)$. On n'est cependant pas encore assuré que les équations considérées peuvent être résolues globalement sur Ω.

La distribution $E * G$ considérée dans la proposition précédente n'est pas en général à support compact. Elle jouit cependant de propriétés remarquables.

Proposition 4.3.3. *Soit $G \in D_\infty(\mathbb{C})'$ une distribution dont le support est inclus dans un compact K de $\mathbb{C}$ et soit $\widehat{G}$ la fonction définie en posant*

$$\widehat{G}(z) = G_\zeta\left(\frac{1}{\pi(z-\zeta)}\right)$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus K$. Alors,

(i) *La fonction $\widehat{G}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus K$.*

(b) *On a*
$$\widehat{G}(z) = \frac{-1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} G_\zeta\left(\frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}}\right)(z-z_0)^m$$
pour z voisin de $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K$.

(c) *On a*
$$\widehat{G}(z) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} G_\zeta(\zeta^m)\frac{1}{z^{m+1}}$$
pour z voisin de ∞.

(d) *La distribution $E * G$ est associée à $\widehat{G}$ sur $\mathbb{C} \setminus K$.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K$ et soit $\varepsilon \in]0, d(z_0, K)[$. Notons ψ_ε une fonction de $D_\infty(\mathbb{C})$ égale à 1 sur un voisinage de 0 et à support dans $\overline{D(0,\varepsilon)}$. Posons

$$e_\varepsilon(z) = \begin{cases} \dfrac{1-\psi_\varepsilon(z)}{\pi z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Alors $e_\varepsilon(z)$ est de classe C_∞ sur $\mathbb{C}$ et la distribution $E_\varepsilon = (1-\psi_\varepsilon)E$ est associée à e_ε. Comme
$$\operatorname{supp}(E - E_\varepsilon) = \operatorname{supp}(\psi_\varepsilon E) \subset \overline{D(0,\varepsilon)}$$
il est clair que

$$\operatorname{supp}(E * G - E_\varepsilon * G) \subset K_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) \leq \varepsilon\}.$$

Il s'ensuit que $E * G$ coïncide avec $E_\varepsilon * G$ sur $\mathbb{C} \setminus K_\varepsilon$.

Par un résultat général de la théorie des distributions, on sait que la distribution $E_\varepsilon * G$ est associée à la fonction de classe C_∞

$$z \mapsto G_\zeta(e_\varepsilon(z-\zeta))$$

et que l'on a

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p}\frac{\partial^q}{\partial \overline{z}^q} G_\zeta(e_\varepsilon(z-\zeta)) = G_\zeta\left(\frac{\partial^p}{\partial z^p}\frac{\partial^q}{\partial \overline{z}^q}(e_\varepsilon(z-\zeta))\right)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tous les naturels p, q.

Par construction,

$$e_\varepsilon(z-\zeta) = \frac{1}{\pi(z-\zeta)}$$

si $|z-\zeta| > \varepsilon$. Il s'ensuit que

$$G_\zeta(e_\varepsilon(z-\zeta)) = G_\zeta(\frac{1}{\pi(z-\zeta)}) = \widehat{G}(z)$$

si $z \in \mathbb{C} \setminus K_\varepsilon$. Vu ce qui précède, on en tire que $E * G$ est associée à $\widehat{G}$ sur $\mathbb{C} \setminus K_\varepsilon$ et que

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p}\frac{\partial^q}{\partial \overline{z}^q}\widehat{G}(z) = G_\zeta\left(\frac{\partial^p}{\partial z^p}\frac{\partial^q}{\partial \overline{z}^q}\left[\frac{1}{\pi(z-\zeta)}\right]\right)$$

sur cet ouvert. Les points (a), (b) et (d) sont alors clairs.

Posons $R = \sup\{|z| : z \in K\}$ et choisissons $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| > R$. Comme

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{z_0^{m+1}} = \frac{1}{z_0 - \zeta}$$

si $|\zeta| < |z_0|$, il résulte de la théorie des séries de puissances naturelles que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{z_0^{m+1}}$$

converge en fait dans $C_\infty(D(0,|z_0|))$. Comme $D(0,|z_0|) \supset K$, on en tire que

$$G_\zeta\left(\frac{1}{z_0-\zeta}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} G_\zeta(\zeta^m)\frac{1}{z^{m+1}}$$

ce qui établit (c). □

Corollaire 4.3.4. *Toute distribution $G \in D_\infty(\Omega)'$ qui vérifie l'équation*

$$\frac{\partial G}{\partial \overline{z}} = 0$$

sur Ω est associée à une fonction holomorphe sur Ω.

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ et soit $\varphi \in D_\infty(\Omega)$ une fonction égale à 1 sur un voisinage de z_0. Alors

$$\varphi G = E * \frac{\partial(\varphi G)}{\partial \overline{z}} = E * \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} G\right).$$

Comme $\partial\varphi/\partial\overline{z}$ est identiquement nul sur un voisinage de z_0, il résulte des points (a) et (d) de la proposition précédente que la distribution G est associée à une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de z_0. On conclut alors par recollement. □

Corollaire 4.3.5. *Toute solution élémentaire de l'opérateur $\partial/\partial\overline{z}$ sur $\mathbb{C}$ est de la forme*

$$E + H$$

où H est la distribution associée à une fonction h holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Corollaire 4.3.6. *Soit K un compact de $\mathbb{C}$, soit $G \in D_\infty(\mathbb{C})'$ une distribution à support dans K et soit S une partie de $\mathbb{C} \setminus K$ qui rencontre toutes les composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$. Alors, il existe une distribution $F \in D_\infty(\mathbb{C})'$ à support dans K telle que*

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = G$$

si et seulement si

$$G(R(z)) = 0$$

pour toute fonction rationnelle R à pôles dans S.

Démonstration. La condition est clairement nécessaire. Montrons qu'elle est également suffisante. Supposons donc que G soit une distribution à support dans K qui s'annule sur toutes les fractions rationnelles à pôles dans S. Dans ce cas, on bien sûr

$$G_\zeta\left(\frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}}\right) = 0$$

pour tout $m \geq 0$ et tout $z \in S$ et

$$G_\zeta(\zeta^m) = 0$$

pour tout $m \geq 0$. Il s'ensuit que $\widehat{G}$ s'annule identiquement sur un voisinage de chaque $z \in S$ et sur un voisinage de ∞. Grâce au principe d'unicité prolongement holomorphe, on en tire que $\widehat{G}$ est identiquement nul sur $\mathbb{C} \setminus K$. Pour conclure, il suffit alors de prendre $F = E * G$. □

4.4 Théorème d'approximation de Runge

Proposition 4.4.1 (Runge)**.** *Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et soir S une partie de $\mathbb{C}\setminus K$ qui rencontre toutes les composantes connexes bornées de $\mathbb{C}\setminus K$. Alors, toute fonction définie et holomorphe sur un voisinage ouvert de K est limite uniforme sur K de fonctions rationnelles à pôles dans S.*

Démonstration. Notons L_1 l'ensemble des restrictions à K des fonctions rationnelles à pôles dans S et L_2 l'ensemble des restrictions à K des fonctions définies et holomorphes sur un voisinage ouvert de K. Il est clair que L_1 et L_2 sont des sous-espaces vectoriels complexes de $C_0(K)$ et que $L_1 \subset L_2$. On sait que $C_0(K)$ muni de la norme

$$f \mapsto \sup_K |f|$$

est un espace de Banach et tout revient à démontrer que l'on a $L_2 \subset \overline{L_1}$ dans cet espace. Vu le théorème de Hahn-Banach, ceci aura lieu si et seulement si toute fonctionnelle linéaire continue sur $C_0(K)$ qui s'annule sur L_1 s'annule aussi sur L_2.

Considérons donc un $\mathcal{T} \in C_0(K)'$ qui s'annule sur L_1 et posons

$$T(\varphi) = \mathcal{T}(\varphi_{|K})$$

pour tout $\varphi \in D_\infty(\mathbb{C})$. Par construction, il est clair que T est une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{C}$ dont le support est inclus dans K et que T s'annule sur toutes les fonctions rationnelles à pôles dans S. Vu le Corollaire 4.3.6, il s'ensuit que la distribution $E * T$ est à support dans K. Soit h une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert Ω de K prolongée par 0 sur $\mathbb{C}\setminus\Omega$ et soit φ une fonction de classe C_∞ sur $\mathbb{C}$ dont le support est un compact de Ω et qui vaut 1 sur un voisinage de K. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(h_{|K}) &= T(\varphi h)\\
&= \frac{\partial(E*T)}{\partial\overline{z}}(\varphi h)\\
&= (E*T)(-\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}h)
\end{aligned}$$

et cette dernière expression est nulle puisque les supports de $E*T$ et de $\partial\varphi/\partial\overline{z}$ sont disjoints. Cela montre que $\mathcal{T}$ s'annule sur L_2 ; d'où la conclusion. □

Rappelons qu'une partie d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est relativement compacte dans Ω si et seulement si son adhérence dans Ω (ou dans $\mathbb{C}$) est un compact de Ω.

Lemme 4.4.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit K un compact de Ω. Alors, les composantes connexes de $\Omega \setminus K$ qui sont relativement compactes dans Ω sont les composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$ incluses dans Ω. De plus, si U est une telle composante, alors $\overline{U}$ est un compact de Ω et $\dot{U} \subset K$. En particulier, on a*

$$\sup_U |f| \leq \sup_{\overline{U}} |f| \leq \sup_{\dot{U}} |f| \leq \sup_K |f|$$

pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Démonstration. Soit U une composante connexe de $\Omega \setminus K$ relativement compacte dans Ω. Alors $\overline{U}$ est un compact de Ω. Comme U est aussi fermé dans $\Omega \setminus K$, on a $\dot{U} \subset K$. Il s'ensuit que U est aussi ouvert et fermé dans $\mathbb{C} \setminus K$. On en tire que U est une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$ et que cette composante est bornée et incluse dans Ω.

Soit maintenant V une composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus K$ incluse dans Ω. Comme V est ouvert et fermé dans $\mathbb{C} \setminus K$, il est aussi ouvert et fermé dans $\Omega \setminus K$. On en tire que V est une composante connexe de $\Omega \setminus K$. Comme on a aussi $\dot{V} \subset K$, il est clair que $\overline{V}$ est un compact de Ω.

Pour conclure, il suffit alors d'utiliser le principe du maximum. □

Cela étant, on énonce aussi parfois le théorème de Runge sur la forme suivante :

Proposition 4.4.3 (Runge bis)**.** *Soit K un compact d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Alors, toute fonction holomorphe sur un voisinage de K est limite uniforme sur K de fonctions holomorphes sur Ω si et seulement si $\Omega \setminus K$ ne possède aucune composante connexe relativement compacte dans Ω.*

Démonstration. Supposons d'abord la condition satisfaite. Vu le lemme précédent, toute composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus K$ rencontre alors $\mathbb{C} \setminus \Omega$. On peut donc trouver un ensemble $S \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ qui rencontre toutes les composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$. La conclusion résulte alors de la Proposition 4.4.1 puisque les fonctions rationnelles à pôles dans S sont holomorphes sur Ω.

Supposons maintenant que toute fonction holomorphe sur un voisinage de K soit limite uniforme sur K de fonctions holomorphes sur Ω. Procédons par l'absurde et supposons que U soit une composante connexe de $\Omega \setminus K$ relativement compacte dans Ω. Soit $z_0 \in U$. La fonction

$$\frac{1}{z - z_0}$$

étant holomorphe sur un voisinage de K est limite uniforme sur K d'une suite f_m de fonctions holomorphes sur Ω. Vu le lemme précédent, on a de plus

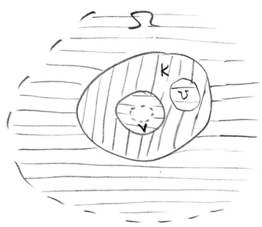
$$\sup_{\overline{U}} |(z - z_0) f_m(z) - 1| \leq \sup_K |(z - z_0) f_m(z) - 1|.$$

On en tire que $(z - z_0)f_m(z) \to 1$ sur $\overline{U}$; ce qui est impossible car $(z - z_0)f_m(z)$ s'annule en $z = z_0$. □

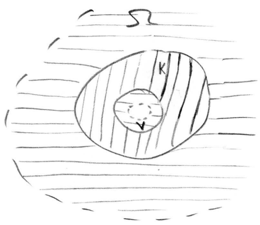
Définition 4.4.4. Un compact K de l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est *holomorphiquement convexe* si et seulement si $\Omega\backslash K$ ne possède pas de composante connexe relativement compacte dans Ω.

Remarque 4.4.5. Dire qu'un compact K de Ω est holomorphiquement convexe dans Ω signifie en quelque sorte qu'aucun « trou » de K n'est inclus dans Ω. Considérons par exemple les cas suivant :

(a)



(b)



Dans le cas (a), $\Omega\backslash K$ possède deux composantes connexes U, V et U est relativement compacte dans Ω. Le compact K n'est donc pas holomorphiquement convexe dans Ω. Dans le cas (b), $\Omega \setminus K$ possède une seule composante connexe V et celle-ci n'est pas relativement compacte dans Ω. Le compact K est donc holomorphiquement convexe dans Ω.

Comme pour la convexité usuelle, la convexité holomorphe peut aussi se caractériser par des propriétés de séparation.

Définition 4.4.6. Soit K un compact d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction complexe f définie sur Ω *sépare* le compact K du point $z \in \Omega \setminus K$ si

$$\sup_K |f| < |f(z)|.$$

Proposition 4.4.7. *Un compact K de l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est holomorphiquement convexe si et seulement si tout point de $\Omega \setminus K$ peut être séparé de K par une fonction holomorphe sur Ω ou de manière équivalente si et seulement si*

$$K = \cap_{f\in\mathcal{O}(\Omega)}\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq \sup_K |f|\}.$$

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, soit $z_0 \in \Omega \setminus K$. Posons $L = K \cup \{z_0\}$. Par construction, il est clair que L est un compact de Ω et que

$$\Omega \setminus L = (\Omega \setminus K) \setminus \{z_0\}.$$

Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des composantes connexes de $\Omega \setminus K$ et U_0 celle qui contient z_0. On a alors

$$\Omega \setminus L = (U_0 \setminus \{z_0\}) \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U} \setminus \{U_0\}} U$$

Comme $U_0 \setminus \{z_0\}$ est connexe, il en résulte que l'ensemble des composantes connexes de $\Omega \setminus L$ est

$$(\mathcal{U} \setminus \{U_0\}) \cup \{U_0 \setminus \{z_0\}\}.$$

Comme K est holomorphiquement convexe dans Ω et comme

$$\overline{U_0 \setminus \{z_0\}}^{\Omega} = \overline{U_0}^{\Omega},$$

on en tire que L est aussi holomorphiquement convexe dans Ω. Soit χ la fonction caractéristique d'un voisinage fermé de z_0 disjoint de K. Vu la Proposition 4.4.3, il existe alors $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que

$$\sup_K |f - \chi| < 1/2 \qquad |f(z_0) - \chi(z_0)| < 1/2$$

et on vérifie aisément qu'un tel f sépare K de z_0.

La condition est aussi suffisante. En effet, si elle est satisfaite alors

$$K = \cap_{f \in \mathcal{O}(\Omega)} \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq \sup_K |f|\}.$$

Supposons que $\Omega \setminus K$ possède une composante connexe U relativement compacte dans Ω. Alors, le Lemme 4.4.2 montre que

$$\sup_U |f| \leq \sup_K |f|$$

pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Cela montre que $U \subset K$ en contradiction avec la définition de U ; d'où la conclusion. □

Définition 4.4.8. Soit K un compact de Ω. On appelle *enveloppe holomorphiquement convexe de K dans* Ω l'ensemble

$$\widehat{K}^{\Omega} = \cap_{f \in \mathcal{O}(\Omega)} \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq \sup_K |f|\}$$

Proposition 4.4.9. *Soit K un compact de Ω. L'enveloppe holomorphiquement convexe de K dans Ω est le plus petit compact holomorphiquement convexe de Ω contenant K. De plus, si $\mathcal{U}_{rc}$ désigne l'ensemble des composantes connexes de $\Omega \setminus K$ qui sont relativement compactes dans Ω, on a*

$$\widehat{K}^{\Omega} = K \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}_{rc}} U$$

Démonstration. Il est clair que $\widehat{K}^\Omega$ est un fermé de Ω et que

$$\widehat{K}^\Omega \subset \widehat{L}^\Omega = L$$

si L est un compact holomorphiquement convexe de Ω contenant K.

Soit V_∞ la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. Comme tout $U \in \mathcal{U}_{\mathrm{rc}}$ est une composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus K$, on voit que

$$\tilde{K}^\Omega = K \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}_{\mathrm{rc}}} U$$

est inclus dans $\mathbb{C} \setminus V_\infty$. Comme

$$\Omega \setminus \tilde{K}^\Omega$$

est de plus l'union des composantes connexes non relativement compactes de $\Omega \setminus K$, on en tire que $\tilde{K}^\Omega$ est un compact holomorphiquement convexe de Ω. Il s'ensuit que $\widehat{K}^\Omega \subset \tilde{K}^\Omega$ et que $\tilde{K}^\Omega$ est un compact de Ω. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\tilde{K}^\Omega \subset \widehat{K}^\Omega$. Soit U une composante connexe relativement compacte de $\Omega \setminus K$. On sait alors que

$$\sup_U |f| \leq \sup_K |f|$$

pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Il s'ensuit que $U \subset \widehat{K}^\Omega$; d'où la conclusion. □

Remarque 4.4.10. Vu ce qui précède, on peut interpréter $\widehat{K}^\Omega$ comme étant l'ensemble obtenu en bouchant les « trous » de K inclus dans Ω.

Corollaire 4.4.11. *Si K est un compact de Ω alors $\widehat{K}^\Omega$ est inclus dans l'enveloppe convexe de K et dans*

$$\{z \in \Omega : d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)\}.$$

Démonstration. Soit L l'enveloppe convexe de K. On sait que L est compact et que

$$L = \bigcap_{a \in \mathbb{C}} \{z \in \mathbb{C} : \langle a, z \rangle \leq \sup_K \langle a, z \rangle\}.$$

Comme

$$|e^{\overline{a}z}| = e^{\Re \overline{a}z} = e^{\langle a, z \rangle}$$

pour tout a, $z \in \mathbb{C}$, on en tire aussitôt que $\widehat{K}^\Omega \subset L$.

Soit maintenant $z_0 \notin \Omega$. On a

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{1}{z - z_0} \right| = \frac{1}{d(K, z_0)}$$

et

$$\left\{z \in \Omega : \left|\frac{1}{z - z_0}\right| \leq \sup_{z \in K} \left|\frac{1}{z - z_0}\right|\right\}$$

peut donc s'écrire

$$\{z \in \Omega : |z - z_0| \geq d(K, z_0)\}.$$

Comme cet ensemble contient $\widehat{K}^\Omega$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, on en tire que

$$d(\widehat{K}^\Omega, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$$

d'où la conclusion. □

Proposition 4.4.12. *Posons*

$$K_m = \{z \in \Omega : d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq 1/m, |z| \leq m\}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Alors chaque K_m est un compact holomorphiquement convexe de Ω et on a

(a) $K_m \subset K_{m+1}^\circ$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}_0$ *;*

(b) $\Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} K_m$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$K_m = \{z \in \Omega : |z| \leq m\} \cap \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega} \{z \in \Omega : d(z, z_0) \geq 1/m\}$$

et d'utiliser la Proposition 4.4.7 pour voir que chaque K_m est holomorphiquement convexe. □

4.5 Surjectivité de l'opérateur $\partial/\partial\overline{z}$ dans le cas C_∞

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. Grâce à la Remarque 4.3.2, nous savons déjà que si $g \in C_\infty(\Omega)$ alors il existe un voisinage U de z_0 dans Ω et $f \in C_\infty(U)$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$$

sur U. Grâce au théorème d'approximation de Runge, nous allons voir que l'on peut faire en sorte que $U = \Omega$. En d'autres termes :

Proposition 4.5.1. *L'opérateur*

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} : C_\infty(\Omega) \to C_\infty(\Omega)$$

est surjectif pour tout ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

Démonstration. Vu les résultats établis dans la section précédente, il est clair que l'on peut trouver une suite $(K_m)_{m\geq 0}$ de compacts holomorphiquement convexes de Ω telle que $K_0 = \emptyset$ et pour laquelle on a

$$\bigcup_{m\geq 0} K_m = \Omega, \qquad \text{et} \qquad K_m \subset K^{\circ}_{m+1}$$

pour tout $m \geq 0$.

Notons ψ_m une fonction de $D_\infty(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de K_{m+1}. Posons $\varphi_0 = \psi_0$ et $\varphi_m = \psi_m - \psi_{m-1}$ si $m \geq 1$. Par construction, on a

$$\operatorname{supp} \varphi_m \subset \Omega \setminus K_m$$

pour tout $m \geq 0$ et

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m = 1$$

la série étant en fait localement une somme finie.

Soit $m \geq 0$. Vu la Remarque 4.3.2, on sait qu'il existe $f_m \in C_\infty(\Omega)$ tel que

$$\frac{\partial f_m}{\partial \overline{z}} = \varphi_m g.$$

Comme φ_m est nul sur un voisinage ouvert V_m de K_m, f_m est holomorphe sur V_m. En utilisant la Proposition 4.4.1, on peut donc trouver $h_m \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que

$$\sup_{K_m} |f_m - h_m| \leq 2^{-m}. \tag{*}$$

Par construction, on a

$$\frac{\partial (f_m - h_m)}{\partial \overline{z}} = \varphi_m g$$

pour tout $m \geq 0$. De plus, la majoration (*) montre que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} (f_m - h_m)$$

converge normalement sur tout compact K de Ω. Notons f sa somme. Comme $f_m - h_m$ est holomorphe sur un voisinage de K_M si $m \geq M$, il résulte du théorème de Weierstrass que

$$\sum_{m=M}^{\infty} (f_m - h_m)$$

est holomorphe sur un voisinage de K_M. On en tire que f est de classe C_∞ sur un voisinage de K_M. Comme M peut être choisi arbitrairement, on a en fait montré que $f \in C_\infty(\Omega)$. Un raisonnement du même type montre aussi que

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial (f_m - h_m)}{\partial \overline{z}} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m g = g;$$

d'où la conclusion. □

On pourrait obtenir une version distribution du résultat précédent en gardant le même schéma de démonstration. Il nous paraît cependant plus instructif d'obtenir cette extension comme corollaire du résultat de Cousin considéré dans la section suivante.

4.6 Résolution du problème de Cousin

Proposition 4.6.1. *Soit $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Supposons disposer pour tout α, $\beta \in A$ d'une fonction*

$$h_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$$

de sorte que

$$h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha} = 0$$

sur $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \cap \Omega_\gamma$. Dans ces conditions, il existe des fonctions $h_\alpha \in \mathcal{O}(\Omega_\alpha)$ telles que

$$h_{\alpha\beta} = h_\alpha - h_\beta$$

sur $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$.

Démonstration. Soit $(\varphi_m)_{m\geq 0}$ une partition localement finie de l'unité de Ω par des fonctions de $D_\infty(\Omega)$ subordonnée au recouvrement $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in A}$. Pour chaque $m \geq 0$ choisissons $\alpha_m \in A$ tel que $\operatorname{supp} \varphi_m \subset \Omega_{\alpha_m}$. Convenons de prolonger chaque $h_{\alpha\beta}$ à Ω par 0 et pour tout $\alpha \in A$, définissons f_α sur Ω_α en posant

$$f_\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m h_{\alpha\alpha_m}.$$

Par construction, il est clair que $f_\alpha \in C_\infty(\Omega_\alpha)$ et que

$$f_\alpha - f_\beta = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m (h_{\alpha\alpha_m} - h_{\beta\alpha_m}) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$$

sur $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$. Notons que pour obtenir cette relation on a exploité deux conséquences aisées de l'hypothèse à savoir :

(i) $h_{\alpha\alpha} = 0$ sur Ω_α ;

(ii) $h_{\beta\alpha} = -h_{\alpha\beta}$ sur $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$.

Comme

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial f_\beta}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}} = 0$$

sur $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$, il existe une fonction $g \in C_\infty(\Omega)$ telle que

$$g = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{z}}$$

sur chaque Ω_α. Vu la proposition 4.5.1, il existe alors $f \in C_\infty(\Omega)$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g.$$

Posons

$$h_\alpha = f_\alpha - f$$

sur chaque Ω_α. Par construction chaque h_α est holomorphe sur Ω_α car sur cet ouvert

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

De plus, comme

$$h_\alpha - h_\beta = f_\alpha - f_\beta = h_{\alpha\beta}$$

sur chaque $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$, la famille $(h_\alpha)_{\alpha \in A}$ a les propriétés voulues. □

4.7 Surjectivité de l'opérateur $\partial/\partial\overline{z}$ dans le cas distribution

Proposition 4.7.1. *L'opérateur*

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} : D_\infty(\Omega)' \to D_\infty(\Omega)'$$

est surjectif pour tout ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit G une distribution sur Ω. Vu la Remarque 4.3.2, il existe un recouvrement $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ de Ω et des distributions $F_\alpha \in C_\infty(\Omega_\alpha)$ telles que

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \overline{z}} = G$$

sur Ω_α. Posons

$$H_{\alpha\beta} = F_\alpha - F_\beta$$

sur $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$. Vu le Corollaire 4.3.4, la distribution $H_{\alpha\beta}$ est associée à une fonction $h_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$. Comme on a alors

$$h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha} = 0$$

sur $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \cap \Omega_\gamma$, la Proposition 4.6.1 montre qu'il existe des fonctions $h_\alpha \in \mathcal{O}(\Omega_\alpha)$ telles que

$$h_\alpha - h_\beta = h_{\alpha\beta}$$

sur $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$. Si nous notons H_α la distribution associée à h_α, on en tire que

$$F_\alpha - H_\alpha = F_\beta - H_\beta$$

sur $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$. Il existe donc $F \in D_\infty(\Omega)'$ tel que

$$F = F_\alpha - H_\alpha$$

sur Ω_α pour tout $\alpha \in A$. Comme

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial F_\alpha}{\partial \overline{z}} = G$$

sur Ω_α pour tout $\alpha \in A$, on a en fait

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = G$$

sur Ω, d'où la conclusion. □

Remarque 4.7.2. En procédant de manière similaire, on pourrait également déduire la surjectivité de

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} : C_\infty(\Omega) \to C_\infty(\Omega)$$

de la Proposition 4.6.1. Cela montre que la résolubilité du problème de Cousin est en fait équivalente à la surjectivité de l'opérateur $\partial/\partial\overline{z}$ dans le cas C_∞. Ce phénomène n'est qu'une conséquence d'un résultat de base de la théorie cohomologique des faisceaux (théorie qui est indispensable pour une étude approfondie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes).

5 Théorème de Mittag-Leffler et fonctions elliptiques

5.1 Théorème de Mittag-Leffler

Dans cette section, nous allons étudier un résultat qui peut être considéré comme une généralisation de la décomposition en fractions simples des fractions rationnelles complexes.

Définition 5.1.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. On sait par le théorème de Laurent que toute fonction holomorphe f sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$f(z) = h(z) + H\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$$

avec $h \in \mathcal{O}(\Omega)$, $H \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ et $H(0) = 0$. Nous dirons que

$$h(z) \quad \text{et} \quad H\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$$

sont les *parties régulière et singulière* de f en z_0.

Remarque 5.1.2. Soit $R(z)$ une fraction rationnelle complexe. Notons $b_1, \ldots, b_q$ ses pôles et $\nu_1, \ldots, \nu_q$ leurs ordres. Grâce au théorème de décomposition en fractions simples, on sait que $R(z)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$R(z) = P(z) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{\nu_j} \frac{c_{jk}}{(z - b_j)^k} \qquad (c_{jk} \in \mathbb{C}).$$

Il s'ensuit que la partie singulière de $R(z)$ en b_j est

$$\sum_{k=1}^{\nu_j} \frac{c_{jk}}{(z - b_j)^k}.$$

La fonction $H(Z)$ correspondante est donc le polynôme sans terme constant

$$\sum_{k=1}^{\nu_j} c_{jk} Z^k.$$

Proposition 5.1.3 (Mittag-Leffler). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite de points deux à deux distincts de Ω et soit $(H_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ s'annulant en 0. Supposons que $S = \{b_n : n \geq 0\}$ soit un fermé discret de Ω. Alors il existe une suite $(h_n)_{n\geq 0}$ de fonctions holomorphes sur Ω pour laquelle la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[h_n(z) + H_n\left(\frac{1}{z - b_n}\right) \right]$$

converge dans $\mathcal{O}(\Omega \setminus S)$ vers une fonction f qui a

$$H_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$$

pour partie singulière en b_n quelque soit $n \geq 0$.

Démonstration. Soit $(K_m)_{m\geq 0}$ une suite de compacts holomorphiquement convexes de Ω telle que

$$\Omega = \bigcup_{m\geq 0} K_m, \qquad K_m \subset K_{m+1}^\circ$$

pour tout $m \geq 0$ et pour laquelle $K_0 = \emptyset$.

Soit $n \geq 0$. Comme $b_n \in K_m$ si m est suffisamment grand, l'entier

$$m_n = \sup\{m \geq 0 : b_n \notin K_m\}$$

est bien défini. Par construction, la fonction

$$H_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$$

est holomorphe sur un voisinage de K_{m_n} et le théorème de Runge montre qu'il existe une fonction $h_n(z)$ holomorphe sur Ω telle que

$$\left|H_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) + h_n(z)\right| \leq 2^{-n}$$

sur K_{m_n}.

Soit maintenant $m \geq 0$. Comme S est un fermé discret de Ω, il est clair que $S \cap K_m$ est fini. L'entier

$$n_m = 1 + \sup\{n \geq 0 : b_n \in K_m\}$$

est donc bien défini et on a $b_n \notin K_m$ si $n \geq n_m$. Il s'ensuit que $m_n \geq m$ si $n \geq n_m$. Ainsi

$$\sup_{z\in K_m}\left|h_n(z) + H_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)\right| \leq 2^{-n}$$

pour tout $n \geq n_m$. On en tire que la série

$$\sum_{n=n_m}^{+\infty}\left[h_n(z) + H_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)\right]$$

converge normalement sur K_m et que sa somme est holomorphe sur K_m°. Comme tout compact K de $\Omega \setminus S$ est inclus dans K_m pour m suffisamment grand, on en tire que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(z) + H_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$$

converge normalement sur tout compact de $\Omega \setminus S$ vers une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus S)$.

Soit $n_0 \geq 0$ et soit $m \geq 0$ tel que $b_{n_0} \in K_m^\circ$. Vu ce qui précède,

$$\sum_{n=n_m}^{\infty} \left[h_n(z) + H_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)\right]$$

est holomorphe sur un voisinage de b_{n_0} ; il en est donc de même de

$$h(z) = h_{n_0}(z) + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq n_0}}^{\infty} \left[h_n(z) + H_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)\right].$$

Comme on a par ailleurs

$$f(z) = h(z) + H_{n_0}\left(\frac{1}{z-b_{n_0}}\right),$$

il est clair que

$$H_{n_0}(\frac{1}{z-b_{n_0}})$$

est la partie singulière de f en b_{n_0}. □

Remarque 5.1.4. (a) Plaçons-nous dans les conditions de l'énoncé précédent et supposons disposer d'une autre fonction $g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus S)$ ayant

$$H_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$$

pour partie singulière en b_n pour tout $n \geq 0$. Vu les propriétés de f, la fonction $g-f$ est holomorphe sur $\Omega \setminus S$ et a une partie singulière nulle en chaque b_n. Il s'ensuit que $g-f$ admet un prolongement holomorphe h à Ω. On a donc

$$g = f + h$$

sur Ω.

(b) La démonstration présentée ci-dessus a l'avantage d'être constructive. On peut cependant donner une démonstration moins explicite mais plus simple grâce à la Proposition 4.6.1. Posons

$$f_p(z) = \sum_{k=1}^{p} H_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right)$$

et $\Omega_p = \Omega \setminus \{z_k : k \geq p+1\}$. Par construction

$$f_p - f_q$$

se prolonge en une fonction $h_{pq} \in \mathcal{O}(\Omega_p \cap \Omega_q)$. Comme

$$h_{pq} + h_{qr} + h_{rp} = 0$$

sur $\Omega_p \cap \Omega_q \cap \Omega_r$, il existe des fonctions $h_p \in \mathcal{O}(\Omega_p)$ telles que

$$h_{pq} = h_p - h_q$$

sur $\Omega_p \cap \Omega_q$. On en tire que $f_p - h_p = f_q - h_q$ sur $\Omega_p \cap \Omega_q$. Il existe donc $h \in \mathcal{O}(\Omega \setminus S)$ tel que $h = f_p - h_p$ sur $\Omega \setminus S$ pour tout p. On en tire que h possède

$$H_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$$

comme partie singulière en b_n pour tout $n \geq 0$.

Exemple 5.1.5. Cherchons une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ayant une partie singulière égale à

$$\frac{1}{z-n}$$

en chaque $n \in \mathbb{Z}$. Vu ce qui précède, on peut chercher f sous la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[h_n(z) + \frac{1}{z-n}\right]$$

où h_n est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ choisie de manière à rendre la série convergente dans $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$. Puisque

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{z-n} = \frac{z}{n(z-n)}$$

si $n \neq 0$, on voit que l'on peut se contenter de prendre $h_0 = 0$ et $h_n = 1/n$ si $n \neq 0$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[h_n(z) + \frac{1}{z-n}\right] = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{z^2-n^2}.$$

En utilisant le facteur sommatoire $\pi \operatorname{cotg}(\pi z)$, on voit par ailleurs que

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c}{c^2-n^2} &= -\left[\operatorname{Res}_{-c}\left(\pi \operatorname{cotg}(\pi z)\frac{c}{c^2-z^2}\right) + \operatorname{Res}_{c}\left(\pi \operatorname{cotg}(\pi z)\frac{c}{c^2-z^2}\right)\right] \\ &= \pi \operatorname{cotg}(\pi c)\end{aligned}$$

quelque soit $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[h_n(z) + \frac{1}{z-n}\right] = \pi \operatorname{cotg}(\pi z)$$

sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. La fonction $\pi \operatorname{cotg}(\pi z)$ résout donc le problème que nous nous sommes posé.

Remarque 5.1.6. Dans l'exemple précédent, il aurait été bien sûr possible de se contenter de constater que la fonction $\pi \operatorname{cotg}(\pi z)$ a les singularités isolées et les parties singulières requises. Cela nous aurait cependant masqué le développement en fractions simples explicite de cette fonction. Notons également que ce développement peut aussi se réécrire aisément sous la forme très simple

$$\pi \operatorname{cotg}(\pi z) = \mathrm{v.\,p.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-n}.$$

5.2 Groupe des périodes d'une fonction holomorphe

Définition 5.2.1. Soit f une fonction définie et holomorphe sur l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On dira que $\omega \in \mathbb{C}$ est une *période* de f si

(a) $\Omega + \omega = \Omega$;

(b) $f(z+\omega) = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Si f possède au moins une période non nulle, on dira que f est *périodique*.

Proposition 5.2.2. *Soit f une fonction définie et holomorphe sur l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Supposons que f ne soit pas localement constant dans Ω. Alors l'ensemble P des périodes de f est un sous-groupe fermé discret de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Vu la définition d'une période, il est clair que P est un sous-groupe de $\mathbb{C}$. Montrons que P est fermé. Soit ω_m une suite de P convergeant vers $\omega \in \mathbb{C}$. Soit $z \in \Omega$. Comme

$$z \pm \omega \mp \omega_m \to z,$$

il existe $M \geq 0$ tel que $z \pm \omega \mp \omega_m \in \Omega$ pour tout $m \geq M$. On en tire que $z \pm \omega \in \Omega \pm \omega_m = \Omega$ et donc que $\Omega + \omega = \Omega$. En particulier, pour tout $z \in \Omega$,

$$z + \omega_m \to z + \omega$$

dans Ω et la continuité de f assure que

$$f(z + \omega_m) \to f(z + \omega).$$

Comme $\omega_m \in P$ il s'ensuit que

$$f(z + \omega) = f(z)$$

et donc que $\omega \in P$.

Supposons à présent que P n'est pas discret. Il existe alors $\omega \in P$ et une suite $\omega_m \in P \setminus \{\omega\}$ telle que $\omega_m \to \omega$. Soit $z_0 \in \Omega$. Par construction, il est clair que

$$f(z_0 + \omega_m - \omega) = f(z_0),$$

que $z_0 + \omega_m - \omega \in \Omega \setminus \{z_0\}$ et que $z_0 + \omega_m - \omega \to z_0$. Il s'ensuit que $f(z) - f(z_0)$ possède un zéro non isolé en z_0 et par conséquent que $f(z) = f(z_0)$ dans un voisinage de z_0. Comme z_0 peut être choisi arbitrairement dans Ω, la preuve est complète. $\square$

Proposition 5.2.3. *Soit P un sous-groupe fermé discret de $\mathbb{C}$. Alors P est d'une des formes suivantes :*

(a) $P = \{0\}$;

(b) $P = \mathbb{Z}\omega_1$ $(\omega_1 \in \mathbb{C}_0)$;

(c) $P = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ $(\omega_1 \in \mathbb{C}_0, \omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R})$.

Démonstration. Définissons le rang de P comme étant la dimension de l'enveloppe linéaire réelle de P et traitons séparément les cas de rang $0, 1, 2$.
Cas de rang 0. C'est le cas trivial ; on a $P = \{0\}$.
Cas de rang 1. Comme P est discret, il existe un $\omega_1 \in P \setminus \{0\}$ de module minimum. Si ω est un autre élément de P on a alors

$$\omega = \lambda\omega_1$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Il est clair que

$$|\omega - \lfloor\lambda\rfloor\omega_1| = |(\lambda - \lfloor\lambda\rfloor)\omega_1| < |\omega_1|.$$

On en tire que $\omega = \lfloor\lambda\rfloor\omega_1$ et comme ω est un élément arbitraire de P il s'ensuit que $P = \mathbb{Z}\omega_1$.
Cas de rang 2. Procédons comme dans le cas de rang 1 et notons ω_1 un élément de $P \setminus \{0\}$ de module minimum. Comme

$$|\omega - r\omega_1| = |(\omega - \lfloor r\rfloor\omega_1) - (r - \lfloor r\rfloor\omega_1)|$$

pour tout $\omega \in P$ et tout $r \in \mathbb{R}$, il est clair que

$$d(P \setminus \mathbb{R}\omega_1, \mathbb{R}\omega_1) = d(P \setminus \mathbb{R}\omega_1, [0,1[\omega_1).$$

Puisque G est discret, on peut donc trouver un élément $\omega_2 \in P \setminus \mathbb{R}\omega_1$ dont la distance à $\mathbb{R}\omega_1$ est minimum. Soit ω un élément arbitraire de P. Comme ω_1 et ω_2 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$, il existe λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\omega = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2.$$

Alors

$$\omega - \lfloor\lambda_1\rfloor\omega_1 - \lfloor\lambda_2\rfloor\omega_2 = (\lambda_1 - \lfloor\lambda_1\rfloor)\,\omega_1 + (\lambda_2 - \lfloor\lambda_2\rfloor)\,\omega_2$$

est un élément de G dont la distance à $\mathbb{R}\omega_1$ est inférieure à

$$(\lambda_2 - \lfloor\lambda_2\rfloor)\,d(\omega_2, \mathbb{R}\omega_1) < d(\omega_2, \mathbb{R}\omega_1).$$

Il s'ensuit que $\lambda_2 = \lfloor\lambda_2\rfloor$ et que $(\lambda_1 - \lfloor\lambda_1\rfloor)\,\omega_1 \in P$. Comme

$$|(\lambda_1 - \lfloor\lambda_1\rfloor)\,\omega_1| < |\omega_1|$$

on voit que $\lambda_1 = \lfloor\lambda_1\rfloor$. On a donc

$$\omega = \lfloor\lambda_1\rfloor\omega_1 + \lfloor\lambda_2\rfloor\omega_2$$

d'où la conclusion. $\square$

Définition 5.2.4. Vu ce qui précède, le groupe des périodes d'une fonction holomorphe non localement constante f sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ doit être d'un type considéré dans la proposition précédente. Dans le cas (a), on dira que f est *non périodique* ; dans le cas (b), on dira que f est *simplement périodique* ; dans le cas (c), on dira que f est *doublement périodique*.

Remarque 5.2.5. Les éléments ω_1 et ω_2 figurant dans la proposition précédente ne sont pas uniques. Plus précisément, on vérifie aisément les résultats suivants.

(a) Des complexes ω_1, $\omega_1' \in \mathbb{C}_0$ sont tels que

$$\mathbb{Z}\omega_1' = P = \mathbb{Z}\omega_1$$

si et seulement si $\omega_1' = \pm\omega_1$.

(b) Des couples de complexes (ω_1, ω_2) et (ω_1', ω_2') avec ω_1, $\omega_1' \in \mathbb{C}_0$; ω_2/ω_1, $\omega_2'/\omega_1' \notin \mathbb{R}$ sont tels que

$$\mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2' = P = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$$

si et seulement s'il existe une matrice entière de déterminant ± 1

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

telle que

$$\begin{aligned} \omega_1' &= a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_2' &= c\omega_1 + d\omega_2. \end{aligned}$$

Définition 5.2.6. On appelle *groupe modulaire* le sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$ formé par les matrices entières de type $(2, 2)$ et de déterminant ± 1. Ce groupe étant constitué des matrices entières de type $(2, 2)$ possédant une matrice inverse entière sera noté $GL(2, \mathbb{Z})$.

5.3 Fonctions holomorphes simplement périodiques

La structure d'une fonction holomorphe simplement périodique est aisément clarifiée.

Proposition 5.3.1. *Soit f une fonction définie et holomorphe sur l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Supposons que le groupe des périodes de f soit de la forme*

$$P = \mathbb{Z}\omega_1 \qquad (\omega_1 \in \mathbb{C}_0).$$

Alors l'image de Ω par

$$z \mapsto e^{\frac{2i\pi}{\omega_1} z}$$

est un ouvert W de $\mathbb{C}_0$ et il existe une unique fonction g définie et holomorphe sur W et telle que

$$f(z) = g\left(e^{\frac{2i\pi}{\omega_1} z}\right)$$

sur Ω.

Démonstration. Comme
$$z \mapsto e^{\frac{2i\pi}{\omega_1}z}$$
n'est constante sur aucune composante connexe de Ω, W est un ouvert de $\mathbb{C}_0$. Posons
$$g(w) = \begin{cases} f\left(\frac{\omega_1}{2i\pi}\ln_0(w)\right) & \text{sur } W \setminus]-\infty, 0] \\ f\left(\frac{\omega_1}{2i\pi}\ln_\pi(w)\right) & \text{sur } W \setminus [0, +\infty[\,. \end{cases}$$
Cette définition est licite car comme
$$\ln_\pi(w) \equiv \ln_0(w) (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$
on a
$$\frac{\omega_1}{2i\pi}\ln_\pi(w) \equiv \frac{\omega_1}{2i\pi}\ln_0(w) (\mathrm{mod}\ \omega_1)$$
et les deux valeurs données pour $g(w)$ coïncident si $w \in W \setminus \mathbb{R}$. Par construction, g est holomorphe sur W et on a
$$f(z) = g\left(e^{\frac{2i\pi}{\omega_1}z}\right)$$
comme annoncé. L'unicité de g est claire puisque
$$W = \{e^{\frac{2i\pi}{\omega_1}z} : z \in \Omega\}.$$
□

Corollaire 5.3.2. *Soit f une fonction définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$. Supposons que le groupe des périodes de f soit de la forme*
$$P = \mathbb{Z}\omega_1 \qquad (\omega_1 \in \mathbb{C}_0).$$
Alors il existe une unique famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes telle que
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{2i\pi n}{\omega_1}z}$$
sur $\mathbb{C}$.

5.4 Fonctions holomorphes doublement périodiques

Le cas des fonctions holomorphes doublement périodiques est beaucoup plus intéressant car son étude est très liée à celle des intégrales elliptiques. Dans ce qui suit, nous allons fixer un couple de périodes (ω_1, ω_2) avec $\omega_1 \in \mathbb{C}_0$ et $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$

et établir quelques propriétés élémentaires des fonctions définies et holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ qui ont

$$P = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$$

pour groupe des périodes.

Le premier résultat montre que le cas $\Omega = \mathbb{C}$ est inintéressant.

Proposition 5.4.1. *Les seules fonctions définies et holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui ont P pour groupe des périodes sont les fonctions constantes.*

Démonstration. Soit f une fonction définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui ont P pour groupe des périodes. Le parallélogramme

$$K = [0,1]\,\omega_1 + [0,1]\,\omega_2$$

étant compact et tout élément de $\mathbb{C}$ étant congru à un élément de K modulo P, il est clair que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Grâce au théorème de Liouville, il en résulte que f est constant sur $\mathbb{C}$. □

Pour obtenir des exemples intéressants, nous devons supposer que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ contient au moins un point z_0. Dans ce cas $\mathbb{C} \setminus \Omega$ contient aussi

$$z_0 + P.$$

Le plus grand Ω ayant cette propriété est bien sûr $\Omega = \mathbb{C} \setminus (z_0 + P)$. Comme une translation ramène aisément l'étude du cas $\Omega = \mathbb{C} \setminus (z_0 + P)$ à celle du cas $\Omega = \mathbb{C} \setminus P$, c'est ce dernier cas que nous allons considérer.

Proposition 5.4.2. *Soit f une fonction définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus P$ qui a P pour groupe des périodes. Alors il existe une unique suite complexe $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ telle que la partie singulière de f en chaque $\omega \in P$ soit*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(z-\omega)^n}.$$

Démonstration. Vu la périodicité de f, il est clair qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que la partie singulière de f en chaque $\omega \in P$ soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(z-\omega)^n}.$$

Considérons le parallélogramme

$$K = [-\varepsilon, 1-\varepsilon]\,\omega_1 + [-\varepsilon, 1-\varepsilon]\,\omega_2.$$

Par construction $K \cap P = \{0\}$ et le théorème des résidus montre que

$$\int_{\partial K} f(z)\, dz = 2i\pi \operatorname{Res}_0 f = 2i\pi\alpha_1.$$

Or, par périodicité, il est clair que

$$\int_{\partial K} f(z)\, dz = 0.$$

Il s'ensuit que $\alpha_1 = 0$ d'où la conclusion. □

Vu le résultat précédent, il est naturel d'essayer de reconstruire la fonction f de l'énoncé à partir de ses parties singulières aux points de P grâce au théorème de Mittag-Leffler. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.4.3. *Pour tout $l \geq 0$, posons*

$$I_l = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 : \sup(|k_1|, |k_2|) = l\}.$$

Alors il existe des constantes d_1, $d_2 > 0$ telles que

$$\frac{8}{d_2^n l^{n-1}} \leq \sum_{(k_1,k_2)\in I_l} \frac{1}{|k_1\omega_1 + k_2\omega_2|^n} \leq \frac{8}{d_1^n l^{n-1}}$$

pour tout $l \geq 1$ et tout $n \geq 1$.

Démonstration. Il est clair que le parallélogramme

$$Q_l = [-l, l]\,\omega_1 + [-l, l]\,\omega_2$$

est l'image par l'homothétie

$$z \mapsto lz$$

du parallélogramme

$$Q = [-1, 1]\,\omega_1 + [-1, 1]\,\omega_2.$$

Comme $0 \in Q^\circ$, les constantes

$$d_1 = \inf\{|z| : z \in \dot{Q}\}, \qquad d_2 = \sup\{|z| : z \in \dot{Q}\}$$

sont strictement positives. Il s'ensuit que

$$d_1 l \leq |\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2| \leq d_2 l$$

si $\sup(|\lambda_1|, |\lambda_2|) = l$. On en tire que

$$\frac{1}{d_2^n}\frac{\#I_l}{l^n} \leq \sum_{(k_1,k_2)\in I_l} \frac{1}{|k_1\omega_1 + k_2\omega_2|^n} \leq \frac{1}{d_1^n}\frac{\#I_l}{l^n}.$$

La conclusion résulte de ce que

$$\#I_l = 2(2l+1) + 2(2(l-1)+1) = 8l.$$

□

Corollaire 5.4.4. *La famille*

$$\left(\frac{1}{(z-\omega)^n}\right)_{\omega\in P}$$

est sommable dans $\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus P)$ *si* $n \geq 3$ *et sa somme est une fonction définie et holomorphe sur* $\mathbb{C}\setminus P$ *dont* P *est le groupe des périodes.*

Démonstration. Soit K un compact de $\mathbb{C}\setminus P$. Posons

$$R = \sup\{|z| : z \in K\}$$

et choisissons L suffisamment grand pour que $D(0, 2R)$ soit inclus dans le parallélogramme

$$Q_l = [-l, l]\,\omega_1 + [-l, l]\,\omega_2$$

si $l > L$. Pour $z \in K$ et $\omega \in \dot{Q}_l$, on a alors

$$\left|\frac{z}{\omega}\right| \leq \frac{1}{2}$$

et par conséquent

$$\frac{1}{|z-\omega|^n} \leq \frac{2^n}{|\omega|^n}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{(k_1,k_2)\in I_l}\sup_{z\in K}\frac{1}{|z-k_1\omega_1-k_2\omega_2|^n} &\leq \sum_{l=0}^{L} 8l\frac{1}{d(K,P)^n} + \sum_{l=L+1}^{\infty}\frac{2^{n+3}}{d_1^n l^{n-1}}\\ &\leq \frac{4L(L+1)}{d(K,P)^n} + \frac{2^{n+3}}{d_1^n(n-2)L^{n-2}}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que la famille

$$\left(\frac{1}{(z-\omega)^n}\right)_{\omega\in P}$$

est sommable dans $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus P)$. Comme

$$\sum_{\omega \in P} \frac{1}{(z+\omega_0-\omega)^n} = \sum_{\omega' \in P} \frac{1}{(z-\omega')^n}$$

si $\omega_0 \in P$, il est clair que la somme de la famille considérée est périodique de période ω_0 pour tout $\omega_0 \in P$. Réciproquement, si ω_0 est une période de la somme considérée, on tire de la relation

$$(\mathbb{C} \setminus P) + \omega_0 = \mathbb{C} \setminus P$$

que $\omega_0 \in P$. □

Corollaire 5.4.5. *La famille*

$$\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)_{\omega \in P_0}$$

est sommable dans $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus P_0)$. De plus, la fonction

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in P_0} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

est définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus P$ et a P pour groupe des périodes.

Démonstration. Comme

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - z^2 + 2z\omega - \omega^2}{(z-\omega)^2\omega^2} = \frac{2-\frac{z}{\omega}}{(1-\frac{z}{\omega})^2}\frac{z}{\omega^3}$$

une légère modification de la preuve du corollaire précédent montre que la famille

$$\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)_{\omega \in P_0}$$

est sommable dans $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus P_0)$. Il s'ensuit que $\wp(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus P$ et que

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z} + \sum_{\omega \in P_0} \frac{-2}{(z-\omega)^3} = -2\sum_{\omega \in P} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

sur $\mathbb{C} \setminus P$. Vu le corollaire précédent, $\wp'(z)$ a donc P pour groupe des périodes. Il s'ensuit que

$$\wp'(z+\omega_0) = \wp'(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus P$ et tout $\omega_0 \in P$. Comme $\mathbb{C} \setminus P$ est connexe, on en tire que

$$\wp(z+\omega_0) = \wp(z) + C$$

avec $C \in \mathbb{C}$. En prenant $z = -\omega_0/2$, on voit que

$$\wp(\omega_0/2) = \wp(-\omega_0/2) + C$$

et la parité de $\wp(z)$ entraîne que $C = 0$. La conclusion en résulte. □

Définition 5.4.6. La fonction $\wp$ dont il est question dans le corollaire précédent est appelée *fonction $\wp$ de Weierstrass.*

Remarque 5.4.7. Il résulte de ce qui précède que

$$\sum_{\omega \in P} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(z-\omega)^n} = \wp^{(n-2)}(z)$$

pour tout $n \geq 3$.

Proposition 5.4.8. *Soit*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n Z^n$$

une série entière non nulle de rayon de convergence ∞. Alors la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-1)^n (n-1)!} \wp^{(n-2)}(z)$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus P$ et sa somme est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus P$ dont P est le groupe des périodes et qui a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(z-\omega)^n}$$

pour partie singulière en chaque $\omega \in P$.

Démonstration. Cela résulte directement de ce qui précède compte tenu des inégalités de Cauchy. □

Corollaire 5.4.9 (Hermite)**.** *Les fonctions f définies et holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus P$ ayant P pour groupe des périodes sont les fonctions de la forme*

$$f(z) = \alpha_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-1)^n (n-1)!} \wp^{(n-2)}(z)$$

avec $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ et

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{z^n}$$

égal à la partie singulière de f en 0.

Démonstration. Cela résulte de ce que

$$f(z) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-1)^n (n-1)!} \wp^{(n-2)}(z)$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et P périodique. □

6 Théorème de Weierstrass et idéaux principaux de $\mathcal{O}(\Omega)$

6.1 Produits infinis de nombres complexes

Soit $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls.

Définition 6.1.1. On dit que le produit infini

$$\prod_{m=0}^{+\infty} z_m$$

converge si la suite des produits partiels

$$\prod_{m=0}^{M} z_m$$

possède une limite non nulle $P \in \mathbb{C}$ lorsque $M \to +\infty$. Dans ce cas, on pose

$$\prod_{m=0}^{+\infty} z_m = P$$

Proposition 6.1.2. *Le produit infini*

$$\prod_{m=0}^{+\infty} z_m$$

converge vers P si et seulement si la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \ln z_m$$

converge vers un logarithme complexe S de P.

Démonstration. La condition est clairement suffisante, montrons qu'elle est aussi nécessaire. Supposons donc que

$$\prod_{m=0}^{+\infty} z_m = P \in \mathbb{C}_0.$$

Comme

$$\prod_{m=p}^{q} z_m = \left(\prod_{m=0}^{q} z_m\right) / \left(\prod_{m=0}^{p-1} z_m\right)$$

si $q \geq p > 0$, il est clair que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M_\varepsilon \geq 0$ tel que

$$\left|\left(\prod_{m=p}^{q} z_m\right) - 1\right| < \varepsilon$$

si $q \geq p > M_\varepsilon$. On en tire que

$$\arg\left(\prod_{m=p}^{q} z_m\right) \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$$

si $q \geq p > M_1$. Il s'ensuit que

$$\arg\left(\prod_{m=p}^{q} z_m\right) = \sum_{m=p}^{q} \arg z_m$$

et par conséquent que

$$\ln\left(\prod_{m=p}^{q} z_m\right) = \sum_{m=p}^{q} \ln z_m$$

si $q \geq p > M_1$. Vu ce qui précède, cela montre que la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \ln z_m$$

est de Cauchy. La conclusion résulte alors de ce que

$$\exp\left(\sum_{m=0}^{M} \ln z_m\right) = \prod_{m=0}^{M} z_m$$

pour tout $M \geq 0$. □

Définition 6.1.3. Vu le résultat précédent, il est naturel de dire que le produit infini

$$\prod_{m=0}^{+\infty} z_m$$

converge absolument si la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |\ln z_m|$$

est convergente.

Proposition 6.1.4. *Le produit infini*

$$\prod_{m=0}^{+\infty} z_m$$

est absolument convergent si et seulement si la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |z_m - 1|$$

est convergente.

Démonstration. Cela résulte directement de la proposition précédente compte tenu du fait que

$$\ln z \sim (z-1)$$

si $z \to 1$. □

Soit maintenant $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes arbitraires.

Définition 6.1.5. On dit que le produit infini

$$\prod_{m=0}^{+\infty} z_m$$

converge s'il existe un $m_0 \geq 0$ tel que $z_m \neq 0$ si $m \geq m_0$ et pour lequel le produit infini

$$\prod_{m=m_0}^{+\infty} z_m$$

converge au sens considéré plus haut.

Vu ce qui précède, il est alors clair que :

Proposition 6.1.6. *Le produit infini*

$$\prod_{m=0}^{+\infty} z_m$$

converge si et seulement si la série

$$\sum_{m=m_0}^{+\infty} \ln z_m$$

converge pour $m_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et que dans ce cas on a

$$\prod_{m=0}^{+\infty} z_m = \left(\prod_{m=0}^{m_0-1} z_m\right) \exp\left(\sum_{m=m_0}^{+\infty} \ln z_m\right).$$

Proposition 6.1.7. *Le produit infini*

$$\prod_{m=0}^{+\infty} z_m$$

est absolument convergent si et seulement si la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |z_m - 1|$$

est convergente.

6.2 Produits infinis de fonctions holomorphes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. Vu les résultats obtenus dans la section précédente, il est naturel de poser la définition suivante :

Définition 6.2.1. Soit K un compact K de Ω. Le produit infini

$$\prod_{m=0}^{+\infty} f_m$$

sera dit *normalement convergent sur K* si la série numérique

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sup_K |f_m - 1|$$

est convergente.

On a alors aisément le résultat suivant :

Proposition 6.2.2. *Supposons que le produit infini*

$$\prod_{m=0}^{\infty} f_m$$

converge normalement sur tout les compacts de Ω vers une fonction f. Alors, f est holomorphe sur Ω et $a \in \Omega$ est un zéro de f si et seulement si a est un zéro d'un des facteurs f_m. De plus, dans ce cas, la multiplicité de a comme zéro de f est la somme des multiplicités de a comme zéro des facteurs f_m qui s'annulent en a.

6.3 Théorème de Weierstrass

Établissons à présent un résultat que l'on peut voir comme une généralisation aux fonctions holomorphes de la formule de reconstruction d'un polynôme complexe à une indéterminée à partir de ses zéros et de leurs multiplicités.

Théorème 6.3.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points deux à deux distincts de Ω et soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers strictement positifs. Supposons que $Z = \{a_n : n \geq 0\}$ soit un fermé discret de Ω. Alors il existe une suite $(h_n)_{n\geq 0}$ de fonctions de holomorphes sans zéro sur Ω pour laquelle le produit infini*

$$\prod_{m=0}^{+\infty} (z - a_n)^{\mu_n} h_n(z)$$

converge normalement sur tout compact de Ω vers une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ dont les zéros sont les éléments de Z, la multiplicité de a_n en tant que zéro de f étant égale à μ_n pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. Soit $(K_m)_{m\geq 0}$ une suite de compacts holomorphiquement convexes de Ω telle que

$$K_0 = \emptyset, \quad K_m \subset K_{m+1}^\circ, \quad \bigcup_{m\geq 0} K_m = \Omega.$$

Pour tout $n \geq 0$, posons

$$m_n = \sup\{m \geq 0 : n \notin K_m\}$$

et notons U_n (resp. V_n) la composante connexe de $\Omega \setminus K_{m_n}$ (resp. $\mathbb{C} \setminus K_{m_n}$) contenant a_n.

Si V_n est non bornée, le Lemme 6.3.2 ci-dessous montre que la fonction

$$\varphi_n(z) = (z - a_n)^{\mu_n}$$

possède un logarithme holomorphe sur un voisinage de K_{m_n}.

Si V_n est bornée, le fait que K_{m_n} soit absolument convexe dans Ω montre que l'on peut trouver $b_n \in V_n \setminus \Omega$. Le même lemme montre alors que la fonction

$$\varphi_n(z) = \left(\frac{z - a_n}{z - b_n}\right)^{\mu_n}$$

possède un logarithme holomorphe sur un voisinage de K_{m_n}.

Grâce au théorème de Runge, on peut donc trouver dans chacun des cas une fonction g_n holomorphe sur Ω telle que

$$|\varphi_n(z)e^{-g_n(z)} - 1| \leq 2^{-n}$$

si $z \in K_{m_n}$. Posons

$$h_n(z) = e^{-g_n(z)}$$

si V_n est non borné et

$$h_n(z) = (z - b_n)^{-\mu_n} e^{-g_n(z)}$$

si V_n est borné. Pour tout $n \geq 0$, on a alors

$$|(z - a_n)^{\mu_n} h_n(z) - 1| \leq 2^{-n}$$

si $z \in K_{m_n}$.

Soit maintenant $m \geq 0$. Comme Z est un fermé discret de Ω, il est clair que $Z \cap K_m$ est fini. L'entier

$$n_m = 1 + \sup\{n \geq 0 : a_n \in K_m\}$$

est donc bien défini et on a $a_n \notin K_m$ si $n \geq n_m$. Il s'ensuit que $m_n \geq m$ si $n \geq n_m$. Ainsi

$$\sup_{z \in K_m} |(z - a_n)^{\mu_n} h_n(z) - 1| \leq 2^{-n}$$

pour tout $n \geq n_m$. On en tire que le produit infini

$$\prod_{n=n_m}^{+\infty} (z - a_n)^{\mu_n} h_n(z)$$

converge normalement sur K_m vers une fonction qui est holomorphe sur K_m°. Comme tout compact K de Ω est inclus dans K_m pour m suffisamment grand, on en tire que le produit infini

$$\prod_{n=0}^{\infty} (z - a_n)^{\mu_n} h_n(z)$$

converge normalement sur tout compact de Ω vers une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Comme la fonction h_n ne s'annule pas sur Ω, la conclusion résulte de la Proposition 6.2.2. □

Lemme 6.3.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.*

(a) *Supposons que a appartienne à une composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Alors il existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que*

$$e^{f(z)} = z - a.$$

(b) *Supposons que a, b appartiennent à la même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Alors il existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que*

$$e^{f(z)} = \frac{z - a}{z - b}.$$

Démonstration. Soit γ un chemin fermé de Ω. Comme la fonction

$$z \mapsto \operatorname{Ind}(\gamma, z)$$

est localement constante sur $\mathbb{C} \setminus \Omega$, on a

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \operatorname{Ind}(\gamma, b)$$

quelque soit b dans la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ contenant a.

Dans le cas (a), comme cette composante connexe est non bornée, il existe une suite $b_n \to \infty$ dans $\mathbb{C} \setminus \Omega$ telle que

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \operatorname{Ind}(\gamma, b_n).$$

Tenant compte de la formule

$$\operatorname{Ind}(\gamma, b_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - b_n}$$

on en tire que $\operatorname{Ind}(\gamma, a) = 0$. Il existe donc $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que

$$g'(z) = \frac{1}{z - a}.$$

Un calcul direct montre alors que la fonction

$$e^{-g(z)}(z - a)$$

a une dérivée logarithmique nulle sur Ω. Il s'ensuit que

$$z - a = Ce^{g(z)}$$

pour une fonction localement constante C bien choisie. Il suffit donc d'ajouter $\ln C$ à g pour obtenir une fonction f vérifiant la condition de l'énoncé.

Dans le cas (b), on sait que

$$\int_\gamma \left(\frac{1}{z - a} - \frac{1}{z - b} \right) dz = 0$$

pour tout chemin fermé de Ω. En procédant comme dans le cas (a), on en tire qu'il existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que

$$g'(z) = \frac{1}{z - a} - \frac{1}{z - b}.$$

Un calcul direct montre alors que la fonction

$$e^{-g(z)} \frac{z - a}{z - b}$$

a une dérivée logarithmique nulle sur Ω et on conclut comme dans le cas (a). $\square$

Exemple 6.3.3. On a

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n\neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

sur $\mathbb{C}$. En effet, pour tout compact K de $\mathbb{C}$, on a

$$\sup_{z\in K} \left| \frac{z}{n} + \ln\left(1 - \frac{z}{n}\right)\right| = O(\frac{1}{n^2})$$

pour $n \to \infty$. Cela montre que le produit infini

$$\pi z \prod_{n\neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une fonction f qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$, qui ne s'annule que sur $\mathbb{Z}$ et dont chaque entier est un zéro simple. Cela étant, il est clair que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}$$

sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Vu la Remarque 5.1.6 et l'exemple qui la précède, on a donc

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi \operatorname{cotg}(\pi z)$$

sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Comme $\pi \operatorname{cotg}(\pi z)$ est la dérivée logarithmique de $\sin(\pi z)$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on en tire qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que

$$f(z) = C \sin(\pi z)$$

sur $\mathbb{C}$. Comme on a de plus

$$\lim_{z\longrightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \pi,$$

on voit que $C = 1$; d'où la conclusion.

Corollaire 6.3.4. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit A un ensemble non-vide. Alors toute famille $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ de fonctions holomorphes non identiquement nulles sur Ω possède un pgcd.*

Démonstration. Soit Z l'ensemble des zéros communs aux différents f_α. Par construction, Z est un fermé discret de Ω. Pour chaque $a \in Z$ notons $\mu_{a,\alpha}$ la multiplicité de a comme zéro de f_α et posons

$$\mu_a = \inf_{\alpha\in A} \mu_{a,\alpha}.$$

Par construction, $\mu_a \in \mathbb{N}_0$. Grâce au Théorème 6.3.1, on sait qu'il existe une fonction f holomorphe sur Ω dont les points de Z sont les seuls zéros, les multiplicités de ces zéros étant données par les μ_a. Comme on sait par ailleurs que g_1 divise g_2 dans $\mathcal{O}(\Omega)$ si et seulement si tout zéro de g_1 de multiplicité ν_1 est un zéro de g_2 de multiplicité $\nu_2 \geq \nu_1$, il est clair que la fonction f est un pgcd de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$. □

6.4 Idéaux principaux de $\mathcal{O}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On sait que l'anneau $\mathcal{O}(\Omega)$ est intègre et les résultats des sections précédentes montrent qu'il présente une certaine ressemblance avec l'anneau $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes à une indéterminée. Il est donc assez naturel de se demander si $\mathcal{O}(\Omega)$ n'est pas aussi principal. La réponse à cette question est négative. En effet, soit $Z = \{a_n : n \geq 0\}$ un fermé discret infini de Ω et soit

$$I = \bigcup_{n\geq 0} \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : f(a_m) = 0 \text{ pour tout } m \geq n\}.$$

Alors I est clairement un idéal propre de $\mathcal{O}(\Omega)$. Supposons que $I = (f)$ avec $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Il existe alors $n \geq 0$ tel que $f(a_n) = 0$. Vu le Théorème 6.3.1, il existe aussi $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que $g(a_n) = 1$, $g(a_m) = 0$ pour tout $m > n$. Pour un tel g on a $g \in I$ et $g \notin (f)$ d'où une contradiction.

Bien que l'anneau $\mathcal{O}(\Omega)$ ne soit pas principal, on peut cependant caractériser assez facilement ses idéaux principaux.

Théorème 6.4.1. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit I un idéal de $\mathcal{O}(\Omega)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) I est principal ;

(b) I est de type fini ;

(c) I est fermé.

Ce résultat est une conséquence des lemmes ci-dessous.

Lemme 6.4.2. *Soient f_1, f_2 des fonctions holomorphes sur Ω sans zéro commun. Alors il existe F_1, $F_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$ tels que*

$$F_1 f_1 + F_2 f_2 = 1.$$

Démonstration. Soient

$$\Omega_1 = \{z \in \Omega : f_1(z) \neq 0\}$$

et

$$\Omega_2 = \{z \in \Omega : f_2(z) \neq 0\}.$$

Comme la fonction
$$\frac{1}{f_1 f_2}$$
est holomorphe sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$, la Proposition 4.6.1 montre qu'il existe $h_1 \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ et $h_2 \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ tels que
$$\frac{1}{f_1 f_2} = h_1 + h_2$$
sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$. On en tire que
$$\frac{1}{f_1} - h_1 f_2 = h_2 f_2$$
sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Comme le premier membre de cette égalité est holomorphe sur Ω_1 et le second sur Ω_2, il existe $F_1 \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que
$$F_1 = \frac{1}{f_1} - h_1 f_2$$
sur Ω_1 et
$$F_1 = h_2 f_2$$
sur Ω_2. En échangeant les rôles de f_1 et f_2, on trouve $F_2 \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ tel que
$$F_2 = \frac{1}{f_2} - h_2 f_1$$
sur Ω_2 et
$$F_2 = h_1 f_1$$
sur Ω_1. Il s'ensuit que
$$F_1 f_1 + F_2 f_2 = 1$$
sur Ω_1 et sur Ω_2, d'où la conclusion. □

Lemme 6.4.3. *Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions holomorphes non nulles sur Ω et soit f un pgcd de $f_1, \ldots, f_p$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$. Alors il existe $F_1, \ldots, F_p \in \mathcal{O}(\Omega)$ tels que*
$$f = F_1 f_1 + \cdots + F_p f_p.$$
En particulier,
$$(f_1, \ldots, f_p) = (f).$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur p.
Cas $p = 2$. Par hypothèse, il existe h_1, $h_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$ sans zéro commun tels que
$$f_1 = h_1 f, \qquad f_2 = h_2 f$$

et le résultat est donc une conséquence directe du lemme précédent.
Cas $p > 2$. Soit g un pgcd de $f_1, \ldots, f_{p-1}$. Vu l'hypothèse de récurrence, il existe $G_1, \ldots, G_{p-1} \in \mathcal{O}(\Omega)$ tels que

$$G_1 f_1 + \cdots + G_{p-1} f_{p-1} = g.$$

Comme f est un pgcd de g et de f_p, ce qui précède montre qu'il existe G et $F_p \in \mathcal{O}(\Omega)$ avec

$$Gg + F_p f_p = f.$$

Pour conclure, il suffit donc de poser $F_1 = GG_1, \ldots, F_{p-1} = GG_{p-1}$. □

Lemme 6.4.4. *Tout idéal fermé de* $\mathcal{O}(\Omega)$ *est principal.*

Démonstration. Soit I un idéal fermé de $\mathcal{O}(\Omega)$. Si $I = \{0\}$, le résultat est trivial. Supposons donc que $I \neq \{0\}$ et notons f un pgcd de la famille des éléments non nuls de I. Posons

$$J = \{h \in \mathcal{O}(\Omega) : hf \in I\}.$$

Par construction, J est un idéal fermé de $\mathcal{O}(\Omega)$ et on a

$$I = Jf.$$

De plus, comme f est un pgcd de la famille des éléments non nuls de I, les éléments de J sont sans zéro commun. Soit $h_1 \in J$ et soit Z_1 l'ensemble des zéros de h_1 dans Ω. Pour tout $a \in Z_1$, posons

$$J_a = \{h \in J : h(a) = 0\}.$$

Il est clair que J_a est un idéal fermé de $\mathcal{O}(\Omega)$. De plus, $J \setminus J_a$ est dense dans J. En effet, si $g_1 \in J_a$, on a $g_1(a) = 0$ et comme les éléments de J sont sans zéro commun, il existe $g_2 \in J$ avec $g_2(a) \neq 0$. Cela étant, la fonction $g_1 + \frac{1}{n} g_2 \in J \setminus J_a$ pour tout $n \geq 1$ et

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} g_1 + \frac{1}{n} g_2 = g_1$$

dans $\mathcal{O}(\Omega)$. Puisque $J \setminus J_a$ est un ouvert dense de l'espace de Fréchet J pour tout $a \in Z$ et que Z est dénombrable, le théorème de Baire montre que

$$\bigcap_{a \in Z} J \setminus J_a$$

est aussi un ouvert dense de J. En particulier il existe

$$h_2 \in \bigcap_{a \in Z} J \setminus J_a.$$

Par construction un tel h_2 n'a pas de zéro commun avec h_1 et le lemme 6.4.2 montre qu'il existe H_1, $H_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$ tels que

$$H_1 h_1 + H_2 h_2 = 1.$$

On en tire que $1 \in J$. Cela entraîne que $J = \mathcal{O}(\Omega)$ et que

$$I = (f),$$

d'où la conclusion. □

Lemme 6.4.5. *Tout idéal principal de* $\mathcal{O}(\Omega)$ *est fermé.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et soit

$$I = (f) = \{hf : h \in \mathcal{O}(\Omega)\}.$$

Notons Z l'ensemble des zéros de f et pour tout $a \in Z$ notons μ_a la multiplicité de a comme zéro de f. On sait que f divise g dans $\mathcal{O}(\Omega)$ si et seulement si tout $a \in Z$ est un zéro de g de multiplicité $\nu \geq \mu_a$. Il s'ensuit que

$$I = \bigcap_{a \in Z} \bigcap_{0 \leq k \leq \mu_a} \{g \in \mathcal{O}(\Omega) : g^{(k)}(a) = 0\}.$$

La conclusion en résulte aisément. □

A Appendice

A.1 Théorème d'Arzelà-Ascoli

Définition A.1.1. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions définies sur A. Nous dirons que $\mathcal{F}$ est

(a) *ponctuellement bornée sur* A si et seulement si

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)| < +\infty$$

pour tout $x \in A$;

(b) *équicontinue sur* A si pour tout $x \in A$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

pour tout $y \in A$ tel que $|x - y| \leq \eta$;

(c) *uniformément équicontinue sur* A si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

pour tous x, $y \in A$ tels que $|x - y| \leq \eta$.

Lemme A.1.2. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{F}$ une famille équicontinue sur K. Alors $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue sur K.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F}$ ne soit pas uniformément équicontinue sur K. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe x, $y \in K$ avec

$$|x - y| \leq \eta \qquad \text{et} \qquad \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

On peut donc trouver deux suites $(x_m)_{m \geq 0}$, $(y_m)_{m \geq 0}$ de K telles que

$$|x_m - y_m| \leq \frac{1}{m} \qquad \text{et} \qquad \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x_m) - f(y_m)| > \varepsilon.$$

Quitte à remplacer ces suites par des sous-suites convergentes on peut supposer que $x_m \to x \in K$ et que $y_m \to y \in K$. En passant à la limite dans l'inégalité $|x_m - y_m| < 1/m$ on voit que $x = y$. Comme $\mathcal{F}$ est équicontinue, il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x) - f(x_m)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x) - f(y_m)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

si $m \geq M$. Il s'ensuit que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x_m) - f(y_m)| \leq \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x_m) - f(x)| + \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x) - f(y_m)| \leq \varepsilon$$

si $m \geq M$, ce qui conduit à une contradiction. □

Lemme A.1.3. *Soit A une partie dénombrable de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{F}$ une famille ponctuellement bornée sur A. Alors, de toute suite de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite qui converge ponctuellement sur A.*

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une énumération de A et soit $(f_m)_{m\geq 0}$ une suite de $\mathcal{F}$. Comme les suites $(f_m(a_n))_{m\geq 0}$ sont bornées dans $\mathbb{C}$, on peut construire par récurrence sur $n \geq 0$ des suites strictement croissantes

$$k_m^{(n)}$$

telles que $k_m^{(n)} \geq k_m^{(n-1)} \geq m$ et pour lesquelles les suites

$$\left(f_{k_m^{(n)}}(a_n)\right)_{m\geq 0}$$

sont convergentes. Comme

$$k_m^{(m)} \geq k_m^{(m-1)} > k_{m-1}^{(m-1)}$$

si $m \geq 1$, on voit que

$$\left(f_{k_m^{(m)}}\right)_{m\geq 0}$$

est une sous-suite de la suite

$$(f_m)_{m\geq 0}.$$

De plus, pour chaque $n \geq 0$,

$$\left(f_{k_m^{(m)}}(a_n)\right)_{m\geq n}$$

est une sous-suite de

$$(f_{k_m^{(n)}}(a_n))_{m\geq n}.$$

Il s'ensuit que la suite $(f_{k_m^{(m)}})_{m\geq 0}$ converge ponctuellement sur A. □

Théorème A.1.4 (Arzela-Ascoli)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues sur Ω. Supposons que $\mathcal{F}$ soit ponctuellement bornée et équicontinue sur Ω. Alors de toute suite de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite qui converge dans $C_0(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $(f_m)_{m\geq 0}$ une suite de $\mathcal{F}$. Soit $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite fondamentale de compacts de Ω. Pour chaque $m \geq 0$, soit A_n une partie dénombrable de K_m telle que $\overline{A_n} \supset K_n$. Posons

$$A = \bigcup_{n\geq 0} A_n.$$

Vu le Lemme A.1.3 on peut extraire de f_m une sous-suite $(f_{k_m})_{m\geq 0}$ qui converge ponctuellement sur A. Montrons que $(f_{k_m})_{m\geq 0}$ converge uniformément sur K_n. Fixons $\varepsilon > 0$. Vu le Lemme A.1.2 il existe $\eta > 0$ tel que

$$\sup_{m\geq 0} |f_{k_m}(x) - f_{k_m}(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

si x, $y \in K_n$ sont tels que $|x - y| \leq \eta$. Comme K_n est compact et que A_n est dense dans K_n il existe des points $x_1, \ldots, x_J \in A_n$ tels que

$$K_n \subset \bigcup_{j=1}^{J} B(x_j, \eta).$$

Si $x \in K_n$, il existe donc $j \in \{1, \ldots, J\}$ tel que $|x - x_j| \leq \eta$. On a donc

$$|f_{k_p}(x) - f_{k_q}(x)| \leq |f_{k_p}(x) - f_{k_p}(x_j)| + |f_{k_p}(x_j) - f_{k_q}(x_j)| + |f_{k_q}(x_j) - f_{k_q}(x)|.$$

Ainsi

$$\sup_{x\in K_n} |f_{k_p}(x) - f_{k_q}(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \sup_{j=1,\ldots,J} |f_{k_p}(x_j) - f_{k_q}(x_j)|.$$

Comme $f_{k_m}(x_j)$ converge pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_{j=1,\ldots,J} |f_{k_p}(x_j) - f_{k_q}(x_j)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

si p, $q \geq M$. On en tire que la suite $f_{k_m}(x)$ est uniformément de Cauchy sur K_n. Comme n est arbitraire la conclusion en résulte. □

A.2 Formule de représentation de Pompeiu

Proposition A.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit K un compact de Ω bordé par la courbe orientée C. Supposons que f soit de classe C_1 sur un voisinage de K. Alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{\pi} \int_K \frac{\partial f/\partial \overline{z}}{z - z_0}\, dxdy$$

pour tout $z_0 \in K^\circ$.

Démonstration. Soit $z_0 \in K^\circ$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D(z_0, \varepsilon)} \subset K^\circ$. Le compact $K \setminus D(z_0, \varepsilon)$ est alors bordé par $C \cup C(z_0, \varepsilon)^-$ et la forme complexe de la formule de Green-Riemann montre que

$$2i \int_{K \setminus D(z_0,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\frac{f(z)}{z - z_0} \right) dxdy = \int_{C \cup C(z_0,\varepsilon)^-} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Il s'ensuit que

$$2i \int_{K \setminus D(z_0,\varepsilon)} \frac{\partial f / \partial \overline{z}}{z - z_0}\, dxdy = \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \int_{C(z_0,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

La fonction $z \mapsto 1/(z - z_0)$ étant clairement localement intégrable sur $\mathbb{C}$, la continuité de $\partial f / \partial \overline{z}$ sur K entraîne que

$$\int_K \frac{\partial f / \partial \overline{z}}{z - z_0}\, dxdy = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \int_{K \setminus D(z_0,\varepsilon)} \frac{\partial f / \partial \overline{z}}{z - z_0}\, dz.$$

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que la continuité de f en z_0 entraîne que

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \int_{C(z_0,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} i \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta = 2i\pi f(z_0).$$

$\square$

Références

[1] L. V. Ahlfors, *Complex analysis*, 2nd ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1966.

[2] F. Bastin and P. Laubin, *Fonctions de variables complexes*, 2002.

[3] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, 6e ed., Enseignement des Sciences, no. 1, Hermann, Paris, 1975.

[4] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, 2nd ed., North-Holland Mathematical Library, no. 7, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[5] S. Lang, *Complex analysis*, Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley, 1977.

[6] R. Narasimhan, *Complex analysis in one variable*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[7] G. Polya and G. Latta, *Complex variables*, Wiley, New York, 1974.

[8] S. Saks and A. Zygmund, *Analytic functions*, 3rd ed., Elsevier, Amsterdam, 1971.

[9] W. A. Veech, *A second course in complex analysis*, Benjamin, 1967.

Table des matières